Bloque I Actividades de síntesis: Aritmética y álgebra

OPCIÓN A

A.1 Halla el resultado de la operación: $3,\widehat{2} + 3,0\widehat{2} - 3,02$

a) De forma exacta.

b) Aproximando los sumandos hasta las centésimas.

c) Calcula los errores absoluto y relativo que se cometen en la aproximación.

a) $\dfrac{29}{9} + \dfrac{272}{90} - \dfrac{302}{100} = \dfrac{1451}{450}$

b) $3,22 + 3,02 - 3,02 = 3,22$

c) $E_a = \dfrac{1451}{450} - 3,22 \cong 0,00\widehat{4}$. $E_r = \dfrac{0,0044}{\dfrac{1451}{450}} \cong 0,0014$

A.2 Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{\sqrt{a^3b^2}\sqrt{b\sqrt{a}}}{\sqrt{ba}}$

b) $2\sqrt[4]{19\,863} + 5\sqrt{\sqrt{3}} - 48^{\frac{1}{4}}$

a) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}bb^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{5}{4}}b = ba\sqrt[4]{a}$

b) $2\sqrt[4]{19\,683} + 5\sqrt{\sqrt{3}} - 48^{\frac{1}{4}} = 18\sqrt[4]{3} + 5\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} = 21\sqrt[4]{3}$

A.3 Sabiendo que $\log 2 \approx 0,301$, calcula los siguientes logaritmos con tres cifras decimales.

a) $\log 4000$ b) $\log 5$ c) $\log \sqrt[4]{80}$

a) $\log (2^2 \cdot 1000) = 2\log 2 + \log 1000 = 3,602$

b) $\log \dfrac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 0,699$

c) $\dfrac{1}{4} \log 80 = \dfrac{1}{4} [\log (2^3 \cdot 10)] = \dfrac{3}{4} \log 2 + \dfrac{1}{4} \log 10 = 0,75 \cdot 0,301 + 0,25 \cdot 1 = 0,476$

A.4. Durante 3 años y al comienzo de cada uno de ellos se ingresan 2500 euros en una cuenta vivienda. Los 3 años siguientes se realizan ingresos de 3500 euros. El banco ofrece un tipo de interés del 5,75% anual. Calcula la cantidad con la que se cuenta al acabar los seis años que dura la operación.

$$C_1 = \frac{a \cdot \left[(1 + r)^{t+1} - (1 + r)\right]}{r} = \frac{2500 \cdot \left[1,0575^7 - 1,0575\right]}{0,0575} = 18\,325,27 \text{ euros}$$

$$C_2 = \frac{a \cdot \left[(1 + r)^{t+1} - (1 + r)\right]}{r} = \frac{1000 \cdot \left[1,0575^4 - 1,0575\right]}{0,0575} = 3358,42 \text{ euros}$$

En total, se contará con C1 + C2 = 18 325,27 + 3358,42 = 21 683,69 euroseuros.

A.5. a) Calcula los valores de A, B, C y D para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\frac{4x^3 + 2x^2 - 3x - 4}{-2x^2 + x + 2} = Ax + B + \frac{Cx + D}{-2x^2 + x + 2}$$

b) Calcula los valores de A y B tales que $x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{91}{216} = (x + A)^3 + B$ y resuelve la ecuación:

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{91}{216} = 0$$

a) Al dividir, el cociente es $-2x -2$, y el resto, $3x$. Por tanto: $A = -2$, $B = -2$, $C = 3$ y $D = 0$.

b) $(x + A)^3 + B = x^3 + 3Ax^2 + 3A^2x + A^3 + B = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{91}{216} \Rightarrow A = -\dfrac{1}{2}$, $B = -\dfrac{8}{27}$

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{91}{216} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{8}{27} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

A.6 A un número desconocido se le aplican las siguientes modificaciones:

- Se le resta $\frac{1}{2}$ y se extrae la raíz cuadrada. Se obtiene el resultado *A*.
- Se le resta $\frac{5}{2}$ y se extrae la raíz cuadrada. Se obtiene el resultado *B*.

Calcula dicho número sabiendo que $A + B = 2$.

$$\sqrt{x - \frac{1}{2}} + \sqrt{x - \frac{5}{2}} = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{x - \frac{1}{2}}\right)^2 = \left(2 - \sqrt{x - \frac{5}{2}}\right)^2 \Rightarrow x - \frac{1}{2} = 4 + x - \frac{5}{2} - 4\sqrt{x - \frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$$2\sqrt{x - \frac{5}{2}} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{x - \frac{5}{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{2} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$ La solución es válida.

A.7 En un parque de ocio acuático se está construyendo una piscina con forma de corona circular tal y como aparece en la figura. La longitud del radio de la circunferencia que la limita por el interior está comprendida entre 25,75 y 26,25 metros, y la de la que la limita por el exterior está comprendida entre 28,75 y 29,25 metros.

a) Calcula entre qué valores se encuentra la longitud que nadaría un visitante del parque que diera dos vueltas completas a la piscina recorriendo su trayecto siempre por el centro de la misma (es decir, en todo momento el nadador equidista de las dos paredes de la piscina).

b) Calcula entre qué valores se encuentra la medida del área de la superficie de esa piscina. Escribe los resultados aproximando a los metros cuadrados.

a) El mínimo radio es $\frac{25{,}75 + 28{,}75}{2} = 27{,}25$ m, y el máximo es $\frac{26{,}25 + 29{,}25}{2} = 27{,}75$ m.

El trayecto *L* que realiza será: $2 \cdot 2\pi \cdot 27{,}25 \leqslant 2 \leqslant 2 \cdot 2 \cdot 27{,}75 \Rightarrow 342 \text{ m} \leqslant L \leqslant 349$ m.

b) El área de una corona circular de radios *r* y *R* metros es $S = \pi(R^2 - r^2)$.

La mínima área se consigue con el radio menor de la exterior y el mayor de la interior. La máxima área se consigue con el radio mayor de la exterior y el menor de la interior. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} 25{,}75 \leqslant r \leqslant 26{,}25 \\ 28{,}75 \leqslant R \leqslant 29{,}25 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi(28{,}75^2 - 26{,}75^2) \leqslant S \leqslant \pi(29{,}75^2 - 25{,}75^2) \Rightarrow 137{,}5\,\pi \leqslant S \leqslant 192{,}5\,\pi$$

$431 \text{ m}^2 \leqslant S \leqslant 605 \text{ m}^2$

A.8 Para sufragar los gastos del viaje de fin de curso, los alumnos van a confeccionar y vender adornos de dos tipos. Para ello cuentan con 1200 bolas blancas, 270 bolas negras y 28 metros de hilo plateado.

Cada adorno de tipo *A* precisa de 20 cm de hilo, 15 bolas blancas y 3 bolas negras, y para cada adorno de tipo *B*, 40 cm de hilo, 10 bolas blancas y 3 bolas negras.

a) Representa gráficamente las diferentes posibilidades de elaboración.

b) Indica si es posible elaborar 50 adornos de tipo *A* y 45 de tipo *B*.

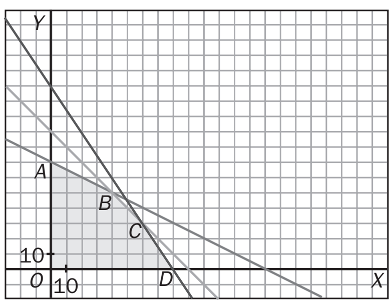
a) Sean x = adornos de tipo *A*, y = adornos de tipo *B*.

Bolas blancas que se precisan: $15x + 10y$. Bolas negras que se precisan: $3x + 3y$.

Centímetros de hilo que se precisan: $20x + 40y$.

$$\begin{cases} 15x + 10y \leqslant 1200 \\ 3x + 3y \leqslant 270 \\ 20x + 40y \leqslant 2800 \\ x \geqslant 0\ ,\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

La solución del sistema de inecuaciones es:



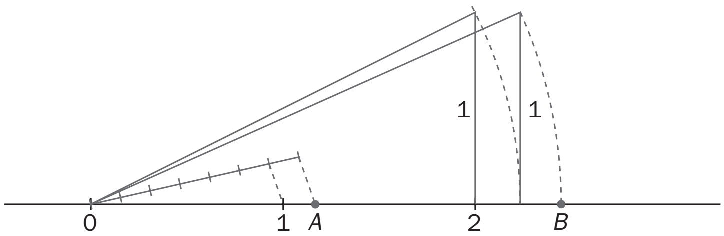
Vértices:

$O(0, 0)$, $A(0, 70)$, $B(40, 50)$, $C(60, 30)$ y $D(80, 0)$

b) No, ya que no se cumple $3x + 3y \leqslant 270$.

OPCIÓN B

B.1 a) Indica los números que corresponden a los puntos A y B de la figura.



b) Da aproximaciones por exceso y por defecto de los números anteriores de forma que el error cometido sea menor que 1 centésima.

a) $\frac{1}{6} = \frac{A}{7} \Rightarrow A = \frac{7}{6}$. Punto entre 2 y B: $C^2 = 1 + 4 \Rightarrow C = \sqrt{5} \Rightarrow B^2 = 1 + (\sqrt{5})^2 \Rightarrow B = \sqrt{6}$

b) $1{,}16 < \frac{7}{6} < 1{,}17$; $2{,}44 < \sqrt{6} < 2{,}45$

B.2. Simplifica todo lo que puedas las siguientes expresiones escribiendo el resultado exacto sin expresiones radicales en el denominador:

a) $\dfrac{\sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt[4]{64}}$ b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{27} + \sqrt{3}}}$

a) $\dfrac{\sqrt{27}+\sqrt{12}}{\sqrt[4]{64}} = \dfrac{\sqrt{3^3}+\sqrt{2^2\cdot 3}}{\sqrt[4]{2^6}} = \dfrac{3\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2^2}} = \dfrac{5\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{2^2}}{2\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2^2}} = \dfrac{5\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{2^2}}{4}$

b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{27} + \sqrt{3}}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3\cdot 2^2}}{\sqrt{3^3} + \sqrt{3}}} = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + \sqrt{3}}} = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}} = \sqrt{\dfrac{2}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

B.3 a) Toma logaritmos en la expresión: $A = \dfrac{3x^2y}{z}$

b) Quita los logaritmos en la expresión: $\log B = 4\log x - 3\log y + 2$

a) $\log A = \log 3 + 2\log x + \log y - \log z$

b) $\log B = 4\log x - 3\log y + \log 100 = \log \dfrac{100x^4}{y^3} \Rightarrow B = \dfrac{100x^4}{y^3}$

B.4 Se solicita un préstamo hipotecario de 125 000 euros a pagar en 20 años y a un interés inicial del 4,5% anual. Las cuotas se pasarán al final de cada mes del período contratado.

a) Calcula a cuánto asciende la primera cuota que se ha de pagar.

b) De esa primera cuota, indica cuánto corresponde al pago de intereses y cuánto a la amortización del capital.

c) Debido a variaciones en el índice de referencia, el banco informa de que el nuevo tipo de interés es del 4,25%. ¿Cuál será la nueva cuota que se ha de pagar cada mes?

a) $a = \dfrac{C\cdot\frac{r}{12}\cdot\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12\cdot t}}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12\cdot t}-1} + \dfrac{125\,000\cdot\frac{0{,}045}{12}\cdot\left(1+\frac{0{,}045}{12}\right)^{12\cdot 20}}{\left(1+\frac{0{,}045}{12}\right)^{12\cdot 20}-1} = 790{,}81$ €

b) Intereses: $125\,000\cdot\dfrac{0{,}045}{12} = 468{,}75$ €. Capital amortizado: $790{,}81 - 468{,}75 = 322{,}06$ €

c) $125\,000 - 322{,}06 = 124\,677{,}94 \Rightarrow a = \dfrac{124\,677{,}94\cdot\frac{0{,}0425}{12}\cdot\left(1+\frac{0{,}0425}{12}\right)^{239}}{\left(1+\frac{0{,}0425}{12}\right)^{239}-1} = 774{,}10$ €

B.5 Dada la expresión $A(x) = (x - 1)^3 - a\,(x - 1)^2 - a(x - 1)$:

a) Calcula el valor de a para que $(x + 1)$ sea un factor de $A(x)$.

b) Para este valor de a, factoriza $A(x)$.

c) Para el mismo valor de a, resuelve la ecuación $\sqrt{\dfrac{A(x)}{x - 1}} = 3$.

a) $A(-1) = 0 \Rightarrow a = -4$ b) $A(x) = (x - 1)(x + 1)^2$ c) $\begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$ ambas válidas

B.6 En una reunión hay 60 personas entre menores, adolescentes y adultos. Se sabe que el número de personas adultas duplica al total de menores y adolescentes. También se sabe que el triple del número de adolescentes sumado al número de menores iguala al número de personas adultas.

¿Cuál es el número de menores, adolescentes y adultos?

Se supone que hay x menores, y adolescentes y z adultos.

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ z = 2(x + y) \\ 3y + x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 60 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 60 \\ -z - 2z = -120 \\ 2y - 2z = -60 \end{cases} \Rightarrow x = 10,\ y = 10,\ z = 40$$

B.7 Los beneficios B de un negocio, según el número x de unidades producidas, vienen dados por la siguiente expresión: $B(x) = \dfrac{x - 50}{x^2 - 50x + 600}$

Calcula la producción que se puede realizar para que los beneficios sean positivos teniendo en cuenta que dicha producción no puede ser mayor de 45 unidades.

$$B(x) = \frac{x - 50}{x^2 - 50x + 600} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x - 50}{x^2 - 50x + 600} \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant 45 \end{cases}$$

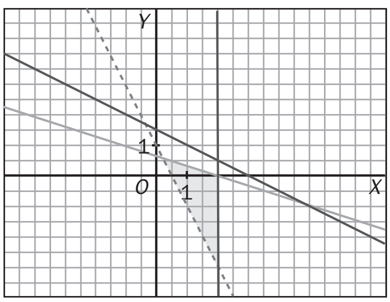
Para resolver la primera inecuación: $x^2 - 50x + 600 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{50 \pm 10}{2} \Rightarrow x = 30\ x = 20$

$$\frac{x - 50}{x^2 - 50x + 600} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{x - 50}{(x - 30)(x - 20)} \geqslant 0$$

La solución de esta primera inecuación es $(20, 30) \cup [50, +\infty)$.

Teniendo en cuenta la segunda inecuación, la producción puede ser cualquier cantidad (tal vez entera) perteneciente al intervalo (20, 30).

B.8 Resuelve gráficamente el siguiente sistema e indica tres de sus soluciones: $\begin{cases} x + 2y \leqslant 3 \\ 2x + y > 1 \\ x + 3y \leqslant 2 \\ x \leqslant 2 \end{cases}$



Algunas soluciones posibles serían: (2, 0), (1, 0) y (2, −1).

Notas:

Notas:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bloque II Actividades de síntesis: Análisis

OPCIÓN A

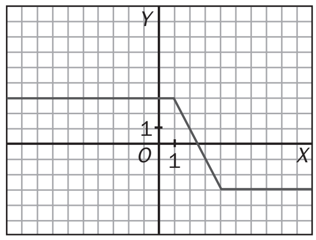
A.1. a) Escribe la función $f(x) = |x - 4| - |x - 1|$ como una función a trozos y dibuja su gráfica.

b) ¿Para cuántos valores de x es $f(x) = 10$?

c) ¿Para qué números c, la ecuación $f(x) = c$ tiene una sola solución?

a) $f(x) = \begin{cases} 4 - x + x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x + x + 1 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ x - 4 - x + 1 & \text{si } 4 < x \end{cases}$

Así pues, $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 5 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ -3 & \text{si } 4 < x \end{cases}$



b) El máximo valor de $f(x)$ es 3, y el mínimo, -3, por lo que no hay ningún número x con $f(x) = 10$.

c) Cuando la recta $y = c$ corte a la gráfica de $y = f(x)$ en un solo punto, es decir, para $-3 < c < 3$.

A.2. El coste mensual de alquilar un coche depende del número de kilómetros recorridos. Ricardo tuvo que pagar en julio 750 euros por 960 km, y en agosto, 1020 euros por 1500 km.

a) Expresa el coste mensual como función de la distancia recorrida suponiendo que una interpolación lineal es el modelo adecuado.

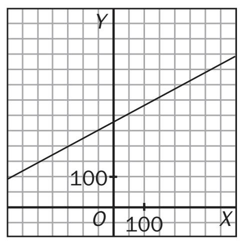
b) ¿Cuánto tendría que haber pagado Ricardo si hubiera recorrido 1200 km?

c) En la gráfica de la función lineal que has obtenido, ¿qué representa la ordenada en el origen?

a) Llamando c al coste y d a la distancia, es $c(960) = 750$ y $c(1500) = 1020$, y al suponer que se trata de una función lineal, es $c(d) = m \cdot d + \frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ y $n = 270$, con lo que $c(d) = \frac{1}{2}d + 270$ €.

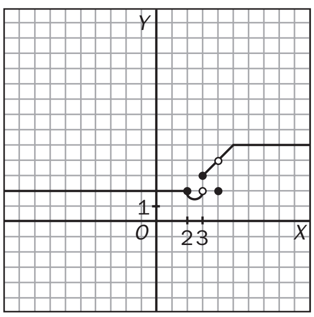
b) El alquiler habría ascendido a $c(1200) = 870$ €.

c) La ordenada en el origen, 270, representa el pago fijo que hay que hacer al alquilar el coche con independencia de los km que hayas recorrido.

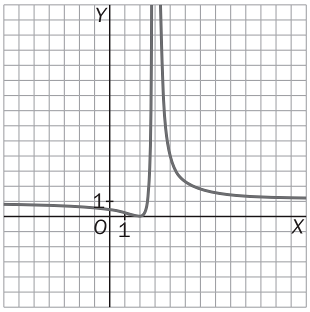


A.3. Dibuja una posible gráfica para una función f definida en R que verifique las siguientes propiedades:

- f es constante en los intervalos $(-\infty, 2]$ y $[5, \infty)$.
- No existe $\lim_{x \to 3} f(x)$.
- Existe $\lim_{x \to 4} f(x)$, pero f no es continua en $x = 4$.



A.4. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+3)^2}$ obteniendo previamente sus elementos más significativos (dominio, cortes con los ejes, signo y asíntotas). No es necesario que utilices la derivada en este problema.



$D(f) = \mathbf{R} - \{3\}$

$f(x) \geqslant 0$. Cortes: eje y: $\left(0, \dfrac{4}{9}\right)$, eje x: $(2, 0)$

Asíntota vertical: $x = 3$ con $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

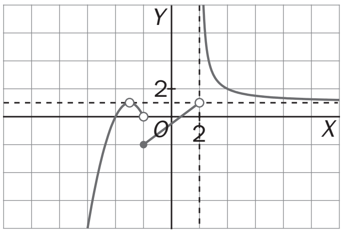
Asíntota horizontal: $y = 1$

Corte con la asíntota horizontal:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{(x-2)^2}{(x-3)^2} \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-2)^2 = (x-3)^2\text{, es decir, } x - 2 = 3 - x,\ x = \frac{5}{2}$$

No tiene asíntotas oblicuas.

A.5. La gráfica de la función f está representada en la figura:



a) Halla el dominio y el recorrido de f.

b) Calcula, si existen, $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, y $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

c) Determina y clasifica los puntos de discontinuidad de f.

d) Estudia si f tiene asíntotas y, en su caso, halla sus correspondientes ecuaciones.

a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-3, 2\}$ $\quad R(f) = \mathbf{R} - \{1\}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existen, pues difieren los laterales.

c) $x = -3$ es una discontinuidad evitable, $x = -2$ es una discontinuidad de salto finito (discontinuidad inevitable) y $x = 2$ es una discontinuidad de salto infinito (discontinuidad inevitable).

d) Tiene una asíntota vertical en $x = 2$ y una horizontal en $y = 1$.

A.6. Calcula los coeficientes a, b y c para que la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el origen y en el punto $(1, 2)$ su tangente sea paralela a la recta $6x - 2y + 1 = 0$.

Si $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, nos dicen que $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ y $f'(1) = 3$,

así que $\begin{cases} c = 0 \\ 1 + a + b = 2 \\ 3 + 2a + b = 3 \end{cases}$.

De las dos últimas ecuaciones, obtenemos $a = -1$, $b = 2$, así que la curva en cuestión es $y = x^3 - x^2 + 2x$.

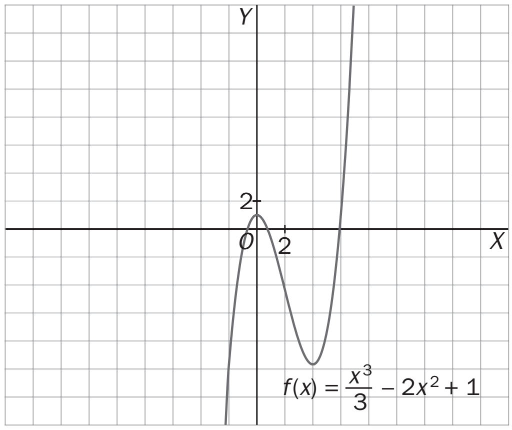
A.7. Considera la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1$.

a) ¿En cuántos puntos de su gráfica se verifica que la tangente es horizontal?

b) Calcula las abscisas de los puntos en los que la tangente es paralela a la recta $y = -3x + 2$.

c) Calcula la ecuación de la tangente paralela a la recta $4x + y + 5 = 0$.

d) ¿Puede haber rectas tangentes a la gráfica de f con pendiente mayor que 1000?



$f'(x) = x^2 - 4x$.

a) Como $f'(x) = 0$ tiene dos soluciones, hay dos puntos en los que la tangente es horizontal.

b) Debemos buscar las x con $x^2 - 4x = -3 \Rightarrow x = 1,\ x = 3$.

c) $x^2 - 4x = -4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \left(2, -\frac{13}{3}\right)$. Recta tangente: $y = -4x + n$ con $-\frac{13}{3} = -8 + n,\ n = \frac{11}{3}$.

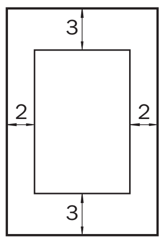
d) Sí, pues $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

A.8. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt{\frac{3x + 4}{x^2 + 1}}$ en el punto de corte con el eje de ordenadas.

$$f'(x) = \frac{\dfrac{(x^2 + 1) \cdot 3 - (3x + 4)2x}{(x^2 + 1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{3x + 4}{x^2 + 1}}} \Rightarrow f'(0) = \frac{3}{4}$$ y la ecuación de la tangente en (0, 2) es $y = \frac{3}{4}x + 2$.

A.9. En las páginas de un libro ha de imprimirse un texto que ocupa 96 cm^2. Los márgenes laterales han de ser de 2 cm, y los márgenes superior e inferior, de 3 cm cada uno. Calcula las dimensiones de cada página para que la cantidad de papel necesario sea mínima.

Llamando x e y a las dimensiones de la página, debemos minimizar el producto xy siendo $(x - 4)(y - 6) = 96$, por lo que $xy - 6x - 4y = 72$, es decir, $y = \frac{72 + 6x}{x - 4}$



y la función minimizar es $f(x) = \frac{72x + 6x^2}{x - 4}$ con $x > 4$.

Así pues:

$$f'(x) = \frac{(x + 4)(72x + 6x) - (72x + 6x^2)}{(x - 4)^2}$$

por lo que $f'(x) = 0$ si $6x^2 - 48x - 288 = 0$, es decir, $x^2 - 8x - 48 = 0$, o sea, $(x - 12)(x + 4) = 0$, con lo que la única solución razonable en el contexto del problema es $x = 12$.

Si $4 < x < 12$, $f'(x) < 0$, y si $x > 12$, $f'(x) > 0$, por lo que en $x = 12$ se presenta un mínimo que corresponde a unas dimensiones de la página $x = 12$, $y = \frac{72 + 72}{8} = 18$ cm.

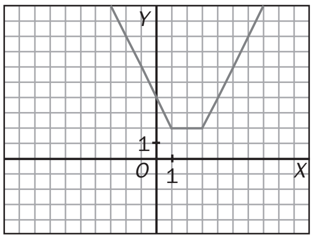
OPCIÓN B

B.1. a) Escribe la función $f(x) = |x - 1| - |x - 3|$ como una función a trozos y dibuja su gráfica.

b) ¿Para cuántos valores de x es $f(x) = 5$?

c) ¿Hay algún número c para el que la ecuación $f(x) = c$ tenga una sola solución?

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x - 3 + x \text{ si } x < 1 \\ x - 1 - 3 + x \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ x - 1 - x + 3 \text{ si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2 \text{ si } x < 1 \\ 2x - 4 \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2 \text{ si } x > 3 \end{cases}$



b) Como la recta horizontal $y = 5$ no corta a la gráfica, no hay valores de x para los que $f(x) = 5$.

c) Para $-2 < c < 2$, la ecuación $f(x) = c$ tiene una única solución. Si $c = 2$ ó $c = -2$ tiene infinitas soluciones y si $-2 > c > 2$, no tiene solución.

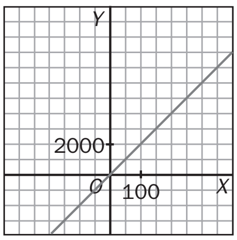
B.2. El gerente de una fábrica de muebles observa que el precio de facturar 120 sillas diarias es de 2200 euros, y el de facturar 300 sillas diarias, es de 5800.

a) Expresa el precio de facturación como función del número de sillas en el supuesto de que una interpolación lineal sea el modelo adecuado.

b) ¿Cuál será el precio de facturación de 200 sillas?

c) Para la gráfica de la función lineal que has obtenido, ¿qué representa la ordenada en el origen?

a) Llamando n al número de sillas y P al precio de facturación, es $P(120) = 2500$ y $P(300) = 5800$, y al suponer que se trata de una función lineal es $P(n) = a \cdot n + b$, por lo que $120a + b = 2500$ y $300a + b = 5800$, de donde, restando, es $a = \dfrac{5800 - 2500}{300 - 120} = 20$ y $b = 5800 - 300 \cdot 20 = -200$, por lo que el precio de facturación, P, en función del número de sillas facturadas, n, es $P(n) = 20n - 200$.

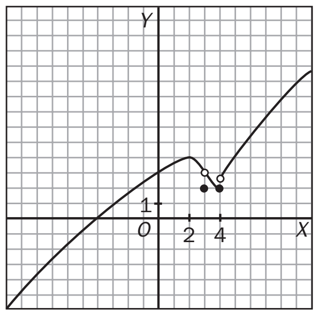


b) El precio de facturación de 200 sillas es $P(200) = 3800$ €.

c) La ordenada en el origen, -200, representa el gasto fijo, independiente del número de sillas facturadas. El hecho de que el valor obtenido sea negativo, indica que el modelo lineal no es el adecuado para este problema.

B.3. Dibuja una posible gráfica para una función f definida en R que verifique las siguientes propiedades:

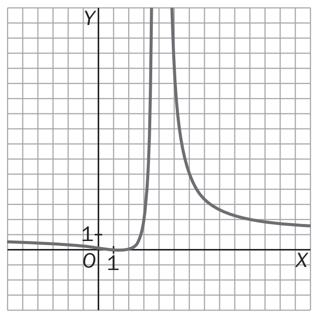
- f es creciente en $(-\infty, 0]$ y $[5, +\infty)$.
- f presenta un máximo relativo en el punto de abscisa 2.
- No existe $\lim_{x \to 4} f(x)$ y no es continua en $x = 3$, aunque en este punto sí que existe límite.



B.4. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x - 4)^2}$ obteniendo previamente sus elementos más significativos (dominio, cortes con los ejes, signo y asíntotas). No es necesario que utilices la derivada.

$D(f) = \mathrm{R} - \{4\}$

Escribiendo $f(x) = \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 4)^2}$, observamos que corta al eje de ordenadas en $\left(0, \dfrac{1}{8}\right)$ y al eje de abscisas en (1, 0) y (2, 0). Presenta una asíntota vertical en $x = 4$ con $\lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \ = +\infty$ y, al tratarse de un cociente de polinomios de igual grado e iguales coeficientes principales, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.



Cortes con la asíntota horizontal: $\begin{cases} y = \dfrac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 4)^2} \\ y = 1 \end{cases}$, así que

$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 8x + 16$, por lo que $x = \dfrac{14}{5}$.

No tiene asíntotas oblicuas.

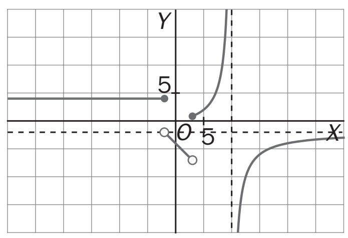
B.5. La gráfica de la función f está representada en la figura:

a) Halla el dominio y el recorrido de f.

b) Calcula, si existen, $\lim_{x \to -2} f(x)$, $\lim_{x \to 3} f(x)$ y $\lim_{x \to 10} f(x)$.

c) Determina y clasifica los puntos de discontinuidad de f.

d) Estudia si f tiene asíntotas y, en su caso, halla sus correspondientes ecuaciones.



a) $D(f) = \mathrm{R} - \{10\}$; $R(f) = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$

b) $\lim_{x \to -2} f(x)$, $\lim_{x \to 3} f(x)$ y $\lim_{x \to 10} f(x)$ no existen, pues difieren los laterales.

c) $x = -2$ y $x = 3$ son discontinuidades de salto finito y $x = 10$ es inevitable de salto infinito.

d) Tiene una asíntota vertical en $x = 10$ y una horizontal en $y = -2$.

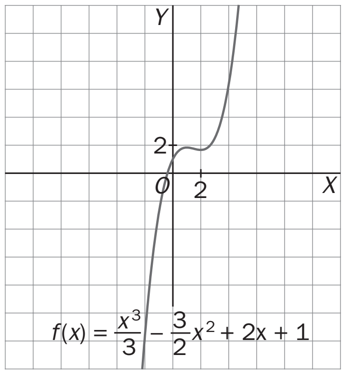
B.6. De la gráfica de la función polinómica $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, se sabe que pasa por el origen de coordenadas y que en los puntos de abscisas 1 y -3 tiene tangentes paralelas a la bisectriz de los cuadrantes 2.º y 4.º Obtén a, b y c.

Nos dicen que $f(0) = 0$, $f'(1) = -1$ y $f'(-3) = -1$.

Como $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, tenemos que $f(0) = 0$, o sea, $c = 0$.

$\left.\begin{array}{r} 3 + 2a + b = -1 \\ 27 - 6a + b = -1 \end{array}\right\}$ Obtenemos $a = 3$, $b = -10$, así que la curva es $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$.

B.7*. Considera la función $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$.



a) Calcula $f'(x)$.

b*) Calcula el valor de $f'(x)$ en los puntos de corte de la función con el eje de ordenadas.

c) Obtén las abscisas de los puntos de la gráfica de f en los que la tangente es horizontal.

d) Obtén las abscisas de los puntos de la gráfica de f en los que la tangente es paralela a la recta $y = 2x + 7$.

e) ¿Hay algún punto en la gráfica de f en el que la tangente sea paralela a la recta $3x + y + 2 = 0$?

a) $f'(x) = x^2 - 3x + 2$

b*) El punto de corte con el eje Y es $(0, 1)$. La derivada en el $(0, 1)$ vale $f'(0) = 2$.

c) $f'(x) = 0$, es decir, $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

d) $f'(x) = 2$, así que $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x = 0$, $x = 3$.

e) Debería ocurrir que $x^2 - 3x + 2 = -3$, o sea, $x^2 - 3x + 5 = 0$, que es una ecuación sin raíces reales, por lo que no hay ningún punto de esta gráfica en el que la tangente sea paralela a la recta $3x + y + 2 = 0$.

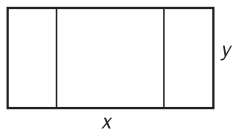
B.8. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ en el punto de abscisa 4.

El punto de la curva de abscisa 4 tiene de ordenada $\frac{4-1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$.

$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x}$, por lo que $f(4) = \frac{2 - \frac{3}{4}}{4} = \frac{5}{16}$ y la ecuación de la tangente pedida es $y = \frac{5}{16}x + n$ con $\frac{3}{2} = \frac{5}{16} \cdot 4 + n$, es decir, $n = \frac{1}{4}$ y la ecuación es $y = \frac{5}{16}x + \frac{1}{4}$.

B.9. Un granjero quiere reservar una parcela rectangular de 1800 m^2 de área para guardar su ganado. Para mayor comodidad a la hora de alimentarlo, decide dividir la parcela en 3 zonas con vallas paralelas a uno de los lados del rectángulo. Calcula las dimensiones de la parcela para que el vallado total sea lo más barato posible.

La situación es como la de la figura.



Debemos hacer mínima la suma $2x + 4y$ con $xy = 1800$. Así que hay que minimizar la función $f(x) = 2x + \frac{7200}{x}$ con $x > 0$; $f'(x) = \frac{2 - 7200}{x^2} = 0$ si $x^2 = 3600$, $x = 60$, $x = -60$.

Por el contexto del problema descartamos la solución $x = -60$ y observamos que si $0 < x < 60$, $f'(x) < 0$, por lo que f es decreciente, y si $x > 60$, $f'(x) > 0$, con lo que f es creciente, presentando, pues, un mínimo en $x = 60$, que corresponde a unas dimensiones de la parcela de $x = 60$ m, $y = \frac{1800}{60} = 30$ m.

Notas:

Notas:

Notas:

Notas:

Bloque III Actividades de síntesis: Estadística y probabilidad

OPCIÓN A

A1. Se ha realizado un test de habilidad espacial a un grupo de niños y se han obtenido los resultados reflejados en la siguiente tabla:

Puntuaciones	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65, 75)	[75, 85)
N.º de niños	10	18	25	32	12	4

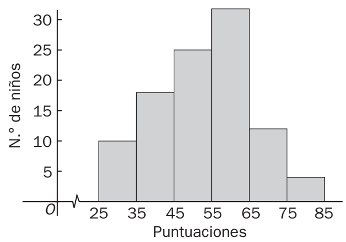
a) Representa los datos en un histograma.

b) Calcula la mediana y la moda.

c) Halla la desviación media.

d) Halla el rango intercuartílico.

a)



b) En la distribución hay 101 datos; por tanto, la mitad es 50,5. La clase mediana es la cuarta, por lo que tomaremos como valor aproximado de la mediana su marca de clase:

$$M = 60 \text{ puntos}$$

La clase modal también es la cuarta, luego $M_0 = 60$ puntos.

c) Para los cálculos formamos la siguiente tabla:

$[L_i, L_s)$	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert f_i$
[25, 35)	30	10	10	300	229,7
[35, 45)	40	18	28	720	233,46
[45, 55)	50	25	53	1250	74,25
[55, 65)	60	32	85	1920	224,96
[65, 75)	70	12	97	840	204,36
[75, 85)	80	4	101	320	108,12
		101		5350	1074,85

Para calcular la desviación media hay que calcular previamente la media:

$$\bar{x} = \frac{5350}{101} = 52,97 \text{ puntos.}$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{1074,85}{101} = 10,64 \text{ puntos}$$

d) $\frac{1}{4} \cdot 101 = 25,25$; $Q_1 = 40$ $\quad \frac{3}{4} \cdot 101 = 75,75$; $Q_3 = 60$ puntos $\quad RI = Q_3 - Q_1 = 60 - 40 = 20$ puntos

A2 (PAU) La variable X representa ingresos familiares medidos en miles de euros, y la tasa de ahorro está expresada por la variable Y. Se dispone de los datos siguientes:

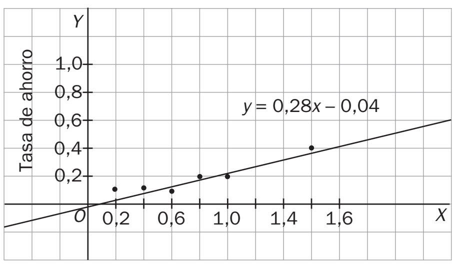
X	1,0	0,4	1,5	0,8	0,6
Y	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

a) Dibuja el diagrama de dispersión.

b) Calcula y representa la recta de regresión de Y sobre X.

c) ¿Qué tasa de ahorro se puede predecir para un ingreso familiar de 0,5 miles de euros?

a)



x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	0,2	1	0,04	0,2
0,4	0,1	0,16	0,01	0,04
1,5	0,4	2,25	0,16	0,6
0,8	0,2	0,64	0,04	0,16
0,6	0,1	0,36	0,01	0,06
4,3	1	4,41	0,26	1,06

b) $\bar{x} = \frac{4,3}{5} = 0,86$ $\quad \bar{y} = \frac{1}{5} = 0,2$ $\quad s_x^2 = \frac{4,41}{5} - 0,86^2 = 0,1424$ $\quad s_{xy} = \frac{1,06}{5} - 0,86 \cdot 0,2 = 0,04$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 0,2 = -\frac{0,04}{0,1424}(x - 0,86)$ $\qquad y = 0,281x - 0,041$

c) Tasa de ahorro: $y = 0,281 \cdot 0,5 - 0,041 = 0,995$ miles de euros

A3 Se dispone de seis cartulinas con los números 2, 3, 4, 5, 8 y 9.

a) ¿Cuántos números diferentes de cuatro cifras se pueden formar con esos dígitos?

b) ¿Cuántos subconjuntos de tres cartulinas se pueden formar con ellas?

a) $VR_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ números

b) $C_{6,3} = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$ subconjuntos

A4 En una empresa, el 60% de los empleados son varones, el 30% ocupa cargos de responsabilidad y el 19% cumple ambas condiciones. Se elige un empleado al azar.

a) Si es varón, ¿cuál es la probabilidad de que ocupe un cargo de responsabilidad?

b) Sabiendo que ocupa un cargo de responsabilidad, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Sea el suceso R = "ocupa cargo de responsabilidad". Completamos la siguiente tabla de contingencia:

	Hombre	**Mujer**	
R	19	11	30
R^C	41	29	70
	60	40	100

a) $P(R \text{ / Hombre}) = \dfrac{19}{60} = 0{,}317$

b) $P(\text{Mujer / } R) = \dfrac{11}{30} = 0{,}37$

A5 La siguiente tabla define la función de probabilidad de una variable X:

X_i	-1	0	1	2	5
P_i	0,2	0,1	0,2	0,2	0,3

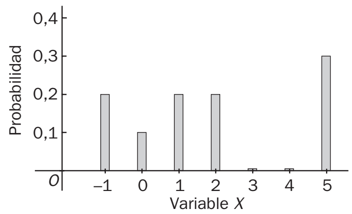
a) Comprueba que es una distribución de probabilidad y represéntala gráficamente.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que X sea menor o igual que 0?

c) Calcula las siguientes probabilidades: $P(X > 0)$, $P(X \leqslant 2{,}8)$ y $P(0 \leqslant X \leqslant 3)$.

d) Calcula la esperanza, la varianza y la desviación típica de la variable X.

a)



b) $P(X \leqslant 0) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$

c) $P(X > 0) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 5) = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}7$

$P(X \leqslant 2{,}8) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}7$

$P(0 \leqslant X \leqslant 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}5$

d) $\mu = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}9$

$\sigma^2 = 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}3 - 1{,}9^2 = 5{,}09 \qquad \sigma = \sqrt{5{,}09} = 2{,}2561$

A6 **(PAU) La compañía aérea Avión sabe que el tiempo de retraso de sus vuelos sigue una ley normal, con un retraso medio de 10 minutos y desviación típica de 5 minutos. Calcula la probabilidad de que:**

a) Un vuelo no tenga retraso.

b) El próximo vuelo llegue con no más de 10 minutos de retraso.

c) El próximo vuelo llegue con no más de 20 minutos de retraso.

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de minutos de retraso de un avión. Se trata de una distribución $N(10, 5)$.

a) $P(X \leqslant 0) = P\left(Z ... \leqslant \dfrac{0 - 10}{5}\right) = P(Z \leqslant -2) = 1 - P(Z ... < 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

b) $P(X \leqslant 10) = P\left(Z ... \leqslant \dfrac{10 - 10}{5}\right) = P(Z ... \leqslant 0) = 0{,}5$

c) $P(X \leqslant 20) = P\left(Z ... \leqslant \dfrac{20 - 10}{5}\right) = P(Z ... \leqslant 2) = 0{,}9772$

A7 **(PAU) Un estudio realizado por una compañía de seguros de automóviles establece que una de cada cinco personas accidentadas es mujer. Si se contabilizan, por término medio, 169 accidentes cada fin de semana:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un fin de semana haya más de 40 mujeres accidentadas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un fin de semana haya más de 144 hombres accidentados?

c) ¿Cuál es, por término medio, el número esperado de hombres accidentados cada fin de semana?

a) Sea X la variable aleatoria discreta que expresa el número de mujeres accidentadas cada fin de semana. Esta variable sigue una $B(169;\ 0{,}2)$.

$n \cdot p = 169 \cdot 0{,}2 = 33{,}8 \geqslant 5$ $\qquad n \cdot q = 169 \cdot 0{,}8 = 135{,}2 \geqslant 5$

La variable se puede aproximar mediante una distribución normal de parámetros $\mu = 169 \cdot 0{,}2 = 33{,}8$ y $\sigma = \sqrt{169 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 5{,}2$.

$P(X > 40) = P(X' \geqslant 40{,}5) = P\left(Z \geqslant \dfrac{40{,}5 - 33{,}8}{5{,}2}\right) = P(Z \geqslant 1{,}29) = 1 - P(Z < 1{,}29) = 1 - 0{,}9015 = 0{,}0985$

b) Sea Y la variable que expresa el número de hombres accidentados cada fin de semana. Esta variable sigue una $B(169;\ 0{,}8)$.

Aplicando el teorema de De Moivre resulta que la variable Y puede aproximarse por una distribución normal de parámetros $\mu = 169 \cdot 0{,}8 = 135{,}28$ y $\sigma = \sqrt{169 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 5{,}2$.

$P(Y > 144) = P(Y' \geqslant 144{,}5) = P\left(Z \geqslant \dfrac{144{,}5 - 135{,}2}{5{,}2}\right) = P(Z \geqslant 1{,}79) = 1 - P(Z < 1{,}79) = 1 - 0{,}9633 = 0{,}0367$

c) Por término medio, el número esperado de hombres accidentados cada fin de semana es: $\mu = 169 \cdot 0{,}8 = 135{,}2$.

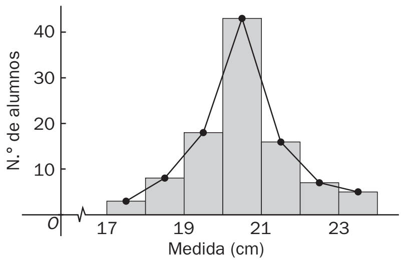
OPCIÓN B

B1 La medida, en cm, de la palma de la mano extendida de 100 alumnos viene dada por la siguiente tabla:

Medida en cm	N.º de alumnos
[17,18)	3
[18, 19)	8
[19, 20)	18
[20, 21)	43
[21, 22)	16
[22, 23)	7
[23, 24)	5

a) Representa gráficamente la distribución.
b) Halla la media y la desviación típica.
c) Halla la mediana.
d) Calcula los cuartiles 1.º y 3.º

a)



$[L_i, L_s)$	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
[17, 18)	17,5	3	3	52,5	918,75
[18, 19)	18,5	8	11	148	2738
[19, 20)	19,5	18	29	351	6844,5
[20, 21)	20,5	43	72	881,5	18 070,75
[21, 22)	21,5	16	88	344	7396
[22, 23)	22,5	7	95	157,5	3543,75
[23, 24)	23,5	5	100	117,5	2761,25
		100		2052	42 273

b) Utilizando los datos de la tabla tenemos:

$x = \frac{2052}{100} = 20,52 \qquad s^2 = \frac{42\,273}{100} - 20,52^2 = 1,6596 \qquad s = 1,29$

c) La mitad de los datos es 50. Por tanto, la clase mediana es la cuarta, tomaremos como aproximación a la mediana la marca de la clase mediana: $M = 20,5$ cm.

d) $\frac{1}{4} \cdot 100 = 25;\ Q_1 = 19,5$ cm $\qquad \frac{3}{4} \cdot 100 = 75;\ Q_3 = 21,5$ cm

B2 Se experimentó en ocho coches un aditivo, obteniéndose los siguientes resultados relativos a la reducción de óxidos de nitrógeno.

Cantidad de aditivo (X)	1	1,5	2	2,5	3	4	4	6
Reducción de óxidos (Y)	1	5	11	10	13	15	20	21

a) Calcula la recta de regresión de Y sobre X y el coeficiente de correlación.
b) ¿Qué reducción de óxidos tendrá lugar si se suministra una cantidad de aditivo igual a 5?
c) ¿Qué fiabilidad tiene esta estimación? Justifica tu respuesta.

a) Formamos la tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	1	1	1	1
1,5	5	2,25	25	7,5
2	11	4	121	22
2,5	10	6,25	100	25
3	13	9	169	39
4	15	16	225	60
4	20	16	400	80
6	21	36	441	126
24	96	90,5	1482	360,5

$\bar{x} = \frac{24}{8} = 3 \qquad s_x^2 = \frac{90,5}{8} - 3^2 = 2,3125 \qquad s_x = \sqrt{2,3125} = 1,52$

$\bar{y} = \frac{96}{8} = 12 \qquad s_y^2 = \frac{1482}{8} - 122 = 41,25 \qquad s_y = \sqrt{41,25} = 6,42$

$s_{xy} = \frac{360,5}{8} - 3 \cdot 12 = 9,0625 \qquad r = \frac{9,0625}{1,52 \cdot 6,42} = 0,927$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 12 = \frac{9,0625}{2,3125}(x - 0,3)$

$y = 3,92x + 0,23$

b) $y = 3,92 \cdot 5 + 0,23 = 19,83$. La reducción en óxidos estimada es de 19,83.

c) La estimación es bastante fiable, pues r es muy próximo a 1.

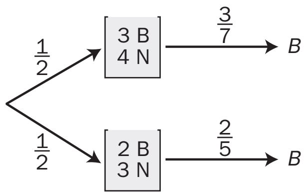
B3 En una asociación de la tercera edad programan hacer un viaje en invierno, otro en primavera y un tercero en otoño. La agencia de viajes les ofrece las siguientes opciones: Canarias, Benidorm, Palma, Lisboa, San Sebastián y Torremolinos. ¿De cuántas formas distintas se pueden organizar los viajes?

Influye el orden y no hay repetición. Se trata de $V_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Se pueden organizar los viajes de 120 formas.

B4 Se consideran dos urnas. La primera está compuesta por 3 bolas blancas y 4 negras, y la segunda, por 2 bolas blancas y 3 negras. Se lanza una moneda al aire: si sale cara, se elige una bola de la primera urna, y si sale cruz, se elige una bola de la segunda urna.

a) Calcula la probabilidad de que la bola elegida sea blanca.

b) Se sabe que la bola extraída es blanca. Calcula la probabilidad de que proceda de la primera urna.



a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15 + 14}{70} = \frac{29}{70} = 0{,}414$

b) $P(\text{Urna } 1 \;/\; B) = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}} = \dfrac{\frac{3}{14}}{\frac{29}{70}} = \frac{15}{29} = 0{,}517$

B5 (PAU) La proporción de parados varones en una ciudad es del 17%. Se seleccionan 8 personas al azar. Halla las siguientes probabilidades:

a) Que estén parados 3 varones.

b) Que estén parados al menos 5.

c) Que haya más de un parado y menos de 4.

d) ¿Cuántos parados se espera que haya entre los 8 seleccionados?

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de parados que hay entre las ocho personas seleccionadas.

Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 8$ y $p = 0{,}17$, es decir, $B(8;\, 0{,}17)$.

a) $P(X = 3) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}17^3 \cdot 0{,}83^5 = 0{,}1084$

b) $P(X \geqslant 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) =$

$= \binom{8}{5} 0{,}17^5 \cdot 0{,}83^3 + \binom{8}{6} 0{,}17^6 \cdot 0{,}83^2 + \binom{8}{7} 0{,}17^7 \cdot 0{,}83^1 + \binom{8}{8} 0{,}17^8 =$

$= 0{,}0045 + 0{,}00046 + 0{,}00002 + 0 = 0{,}005$

c) $P(1 < X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}2646 + 0{,}1084 = 0{,}3730$

d) El número de parados entre las ocho personas seleccionadas es: $8 \cdot 0{,}17 = 1{,}36$. Es decir, se espera que haya un parado.

B6 **(PAU). En las empresas multinacionales *A* y *B*, que tienen 50 000 y 60 000 empleados, respectivamente, el sueldo mensual de estos se ajusta a una distribución normal, con media de 1800 euros y desviación típica de 650 euros en el caso de *A*, y con media de 2000 euros y desviación típica de 500 euros en el caso de *B*. ¿Cuál de las dos empresas tiene más empleados con sueldo mensual superior a 3000 euros?**

Empresa *A*:

Sea X la variable que expresa el sueldo mensual de los empleados de esta empresa. La variable X sigue una distribución normal $N(1800, 650)$.

$$P(X > 3000) = P\left(Z > \frac{3000 - 1800}{650}\right) = P(Z > 1{,}85) = 1 - P(Z \leqslant 1{,}85) = 1 - 0{,}9678 = 0{,}0322$$

Como la empresa *A* tiene 50 000 empleados, el número de ellos con sueldo mensual superior a 3000 euros es:

$$50\,000 \cdot 0{,}0322 = 1610$$

Empresa *B*:

Sea X' la variable que expresa el sueldo mensual de los empleados de esta empresa. La variable X' sigue una distribución normal $N(2000, 500)$.

$$P(X' > 3\,000) = P\left(Z > \frac{3000 - 2000}{500}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Como la empresa *B* tiene 60 000 empleados, el número de ellos con sueldo mensual superior a 3000 euros es:

$$60\,000 \cdot 0{,}0228 = 1368$$

Por tanto, la empresa *A* tiene más empleados con sueldo mensual superior a 3000 euros que la empresa *B*.

B7 **Los pesos en kg de 20 jóvenes son:**

51, 49, 55, 53, 49, 47, 48, 50, 43, 60, 48, 54, 62, 57, 46, 49, 52, 42, 38, 61

a) Agrupa los datos en intervalos de amplitud 5, siendo el extremo inferior del primer intervalo 37,5.

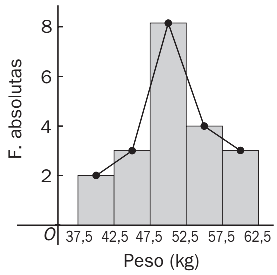
b) Dibuja el histograma de frecuencias y calcula la media y la desviación típica de los datos agrupados.

c) Compara la proporción de observaciones en el primer intervalo con lo que cabría esperar bajo una distribución normal de media 50 y desviación típica 6,4.

a)

$[L_i, L_s)$	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
[37,5; 42,5)	40	2	80	3200
[42,5; 47,5)	45	3	135	6075
[47,5; 52,5)	50	8	400	20 000
[52,5; 57,5)	55	4	220	12 100
[57,5; 62,5)	60	3	180	10 800
			1015	52 175

b)



b) $\bar{x} = \dfrac{1015}{20} = 50{,}75$ kg $\qquad s^2 = \dfrac{52\,175}{20} - 50{,}75^2 = 33{,}1875 \qquad s = \sqrt{33{,}1875} = 5{,}76$

c) En el primer intervalo están el 10% de los datos.

$$P(37{,}5 < X < 42{,}5) = P\left(37{,}5 - \frac{50}{6{,}4} \leqslant Z \leqslant \frac{42{,}5 - 50}{6{,}4}\right) = P(-1{,}95 \leqslant Z < -1{,}17) =$$

$$= P(1{,}17 < Z \leqslant 1{,}95) = 0{,}9744 - 0{,}8790 = 0{,}0954$$

Bajo la distribución normal se encuentran el 95,4% de los datos; por tanto, valores muy similares.

Notas:

Notas: