

Actividades

1. Representa, con ayuda de la calculadora, las funciones $f(x)=1,8^x$ y $h(x)=0,3^x$.

Tabla de valores:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
$f(x)=1,8^x$	1	1,8	3,24	5,83	0,56	0,31	0,17
$h(x)=0,3^x$	1	0,3	0,09	0,027	3,33	11,11	37,04

Gráficas:

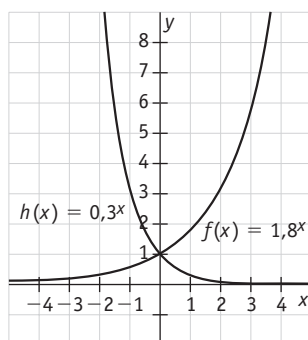


Fig. 14.1.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $12^5 = x^2$ b) $x^6 = 64$
 c) $3^{2x} = 531441$ d) $\log_5 200 = x$
 e) $\log_x 1024 = 10$ f) $\log_2 3x = 5$

a) $12^5 = x^2 \Leftrightarrow 12^{5/2} = x$.

Con la calculadora: $12 \left[x^y \right] 2,5 \left[= \right] 498,8306$

b) $\log x^6 = \log 64 \Rightarrow 6 \log x = 1,806179974 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log x = 0,3010299957 \Rightarrow x = \text{antlog } 0,3010299957 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 2$

En este caso, es conveniente observar que $64 = 2^6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^6 = 2^6 \Rightarrow x = 2$

c) Aplicando logaritmos: $\log(3^{2x}) = \log 531441 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2x \log 3 = \log 531441 \Rightarrow x = \frac{\log 531441}{2 \log 3} = 6$.

(Podríamos observar que $531441 = 3^{12}$).

d) $\log_5 200 = x \Rightarrow 5^x = 200 \Rightarrow \log 5^x = \log 200 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \log 5 = \log 200 \Rightarrow x = \frac{\log 200}{\log 5} = 3,2920$.

e) $\log_x 1024 = 10 \Rightarrow x^{10} = 1024 \Rightarrow x = \sqrt[10]{1024} = 2$

f) $\log_2 3x = 5 \Rightarrow 3x = 2^5 \Rightarrow 3x = 32 \Rightarrow x = 32/3$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de tipo exponencial.

a) $4^x + 2^{x+3} - 20 = 0$;

b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+3} = 88$;

c) $x^2 e^x - 2x e^x = 0$

a) $4^x + 2^{x+3} - 20 = 0 \Rightarrow 2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 20 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{2} = \frac{-8 \pm 12}{2} = 2 \Rightarrow x = 1$$

(La solución -10 no vale.)

b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+3} = 88 \Rightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x + 8 \cdot 2^x = 88 \Rightarrow 11 \cdot 2^x = 88 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

c) $x^2 e^x - 2x e^x = 0 \Rightarrow x e^x (x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

4. Calcula el valor de x en las siguientes ecuaciones:

a) $3 \log x - 5 \log 2 = \log \frac{x}{2}$

b) $\log(x+1) - \log(x-3) = 5$

a) $3 \log x - 5 \log 2 = \log \frac{x}{2} \Rightarrow \log x^3 - \log 2^5 = \log \frac{x}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log \frac{x^3}{2^5} = \log \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x^3}{2^5} = \frac{x}{2} \Rightarrow x^3 - 16x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 16) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -4, x = 4.$$

La única que vale es $x = 4$.

b) $\log \frac{x+1}{x-3} = 5 \Rightarrow \frac{x+1}{x-3} = 100000 \Rightarrow x = \frac{300001}{99999}$

5. Dibuja a partir de la función $f(x) = \cos x$, las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = \cos x - 1$

b) $f(x) = \cos(x-2)$

c) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

- a) Se traslada una unidad hacia abajo.

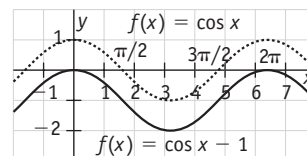


Fig. 14.2.

- b) Se traslada 2 unidades hacia la derecha.

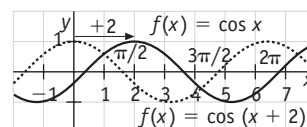


Fig. 14.3.

- c) Su periodo es $p = 4\pi$.

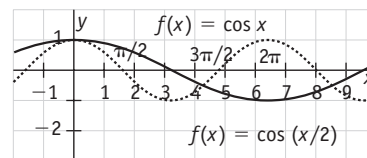


Fig. 14.4.

6. Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

a) $1 - 2 \text{sen } x = 3$

b) $\cos 2x = 1/2$

Representa gráficamente las funciones $f(x) = 2 \text{sen } x$ y $g(x) = \cos 2x$ y da una interpretación gráfica de las soluciones halladas.

a) $1 - 2 \text{sen } x = 3 \Rightarrow \text{sen } x = -1 \Rightarrow x = \arcsen(-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$b) \cos 2x = 1/2 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ o } 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ o } x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

Gráficamente:

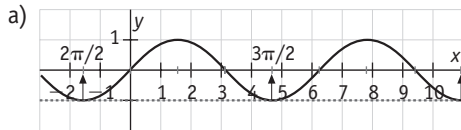


Fig. 14.5.

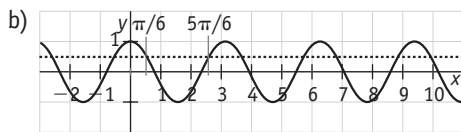


Fig. 14.6.

Problemas propuestos

Tipo I. Las funciones exponencial y logarítmica

1. **Calcula, aplicando la definición de logaritmo, el valor de:**

- a) $\log_9 81$ b) $\log_2 \sqrt{128}$
c) $\log_4 \frac{1}{16}$ d) $\log_5 \sqrt[4]{125}$

a) $\log_9 81 = x \Rightarrow 9^x = 81 \Rightarrow x = 2$
b) $\log_2 \sqrt{128} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{128} \Rightarrow 2^x = 2^{7/2} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$
c) $\log_4 \frac{1}{16} = x \Rightarrow 4^x = \frac{1}{16} \Rightarrow 4^x = 4^{-2} \Rightarrow x = -2$
d) $\log_5 \sqrt[4]{125} = x \Rightarrow 5^x = \sqrt[4]{125} \Rightarrow 5^x = 5^{3/4} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

2. **Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$, halla (sin calculadora) el valor de:**

- a) $\log 20$ b) $\log 200$ c) $\log 0,0002$

a) $\log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 0,3010 + 1 = 1,3010$
b) $\log 200 = \log (2 \cdot 10^2) = \log 2 + \log 10^2 = 0,3010 + 2 = 2,3010$
c) $\log 0,0002 = \log (2 \cdot 10^{-4}) = \log 2 + \log 10^{-4} = 0,3010 - 4 = -3,699$

3. **Sabiendo que $\log 3 = 0,4771$, halla (sin calculadora) el valor de:**

- a) $\log 0,3$; b) $\log 30000$; c) $\log (1/9)$;

a) $\log 0,3 = \log (3 \cdot 10^{-1}) = \log 3 + \log 10^{-1} = 0,4771 - 1 = -0,5229$
b) $\log 30000 = \log (3 \cdot 10^4) = \log 3 + \log 10^4 = 0,4771 + 4 = 4,4771$
c) $\log (1/9) = \log 3^{-2} = -2 \log 3 = -2 \cdot 0,4771 = -0,9542$

4. **A partir de los valores de logaritmo de 2 y de 3, halla:**

- a) $\log 6$ b) $\log 75$ c) $\log(0,36)$

a) $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0,3010 + 0,4771 = 0,7781$

b) $\log 75 = \log (3 \cdot 5^2) = \log 3 + 2 \log 5 = 0,4771 + 2 \log(10/2) = 0,4771 + 2(\log 10 - \log 2) = 0,4771 + 2(1 - 0,3010) = 1,8751$
c) $\log 0,36 = \log (36/100) = \log 6^2 - \log 10^2 = 2 \log 6 - 2 = 2 \cdot 0,7781 - 2 = -0,4438$

5. **Utilizando la fórmula del cambio de base, halla:**

- a) $\log_2 100$
b) $\log_5 500$
c) $\log_8 320000$

a) $\log_2 100 = \frac{\log 100}{\log 2} \approx 6,6439$
b) $\log_5 500 = \frac{\log 500}{\log 5} \approx 3,8614$
c) $\log_8 320000 = \frac{\log 320000}{\log 8} \approx 6,0959$

6. **Con ayuda de la calculadora, representa gráficamente las funciones.**

- a) $f(x) = 1,1^x$
b) $y = (0,8)^x$

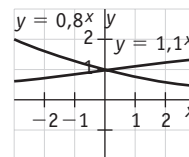


Fig. 14.7.

7. **Con ayuda de la calculadora, representa gráficamente la función exponencial $f(x) = e^{2x-1}$.**

Tabla de valores:

x	$f(x) = e^{2x-1}$
-2	$e^{-5} = 0,0067\dots$
-1	$e^{-3} = 0,0497\dots$
0	$e^{-1} = 0,3678\dots$
1	$e = 2,7182\dots$
2	$e^3 = 20,0855\dots$
1/2	$e^0 = 1$

Se obtiene la gráfica

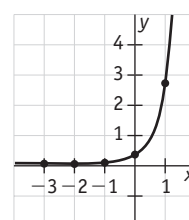


Fig. 14.8.

8. **Con ayuda de la calculadora, representa gráficamente la función logarítmica $f(x) = \log(x^2 + 1)$.**

Tabla de valores:

x	f(x)=log(x ² +1)
-3	log 10 = 1
-2	log 5 = 0,6990
-1	log 2 = 0,3010
0	log 1 = 0
1	log 2 = 0,3010
2	log 5 = 0,6990
3	log 10 = 1

Se obtiene la figura

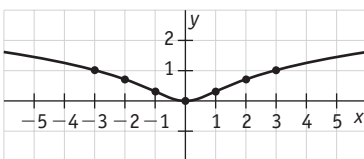


Fig. 14.9.

9. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = 10^{x-2}$;
b) $f(x) = 10^{1/(x-2)}$;
c) $f(x) = 10^{\sqrt{x-2}}$

- a) Dom $f(x) = \mathbb{R}$
b) Dom $g(x) = \mathbb{R} - \{2\}$
c) Dom $h(x) = [2, \infty)$

10. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

- a) $y = \log(x+3)$
b) $y = \log(x^2+3)$
c) $y = \frac{1}{\log(x+3)}$

- a) Dom $f(x) = (-3, \infty)$
b) Dom $g(x) = \mathbb{R}$
c) $h(x)$ está definida siempre que $x+3 > 0$, es decir, para $x > -3$.
Además se tiene que cumplir que $\log(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x+3 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -2$
Por tanto, Dom $h(x) = (-3, \infty) - \{-2\}$

11. Sea la función $f(x) = \log(-x^2+x+2)$. Indica su dominio de definición y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

La función está definida cuando $-x^2+x+2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 2$.
Por tanto, Dom $f(x)$ = intervalo $(-1, 2)$.
Corte con el eje OY. Si $x = 0 \Rightarrow f(0) = \log 2 = 0,3010$.
Punto $(0; 0,3010)$.
Corte con el eje OX. Si $f(x) = 0 \Rightarrow \log(-x^2+x+2) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow -x^2+x+2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Puntos: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

Tipo II. Ecuaciones y sistemas (exponenciales y logarítmicos)

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $x = 15,2^{1,1}$ b) $x = 1,001^{100}$
c) $0,5 = 5^{2x}$ d) $3 = x^{2,5}$
f) $5^{2x} = 625$ e) $5^{3x+2} = 15\,625$

- a) $x = 15,2^{1,1} = 19,954$
b) $x = 1,001^{100} = 1,105$
c) $0,5 = 5^{2x} \Rightarrow \log 0,5 = 2x \cdot \log 5 \Rightarrow x = -0,215$
d) $3 = x^{2,5} \Rightarrow x = \sqrt[2,5]{3} = 1,552$
e) $5^{2x} = 625 \Rightarrow 5^{2x} = 5^4 \Rightarrow x = 2$
f) $5^{3x+2} = 15\,625 \Rightarrow \log 5^{3x+2} = \log 15\,625 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (3x+2) \log 5 = \log 15\,625 \Rightarrow 3x+2 = \frac{\log 15\,625}{\log 5} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 4/3.$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $4^{1-3x} = 2^{x-2}$ b) $3^x - 3^{-x} = \frac{80}{9}$
c) $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21$ d) $9^x - 8 \cdot 3^{x+1} - 81 = 0$
e) $4^x - 50 \cdot 2^x = 9984$ f) $25^x - 100 \cdot 5^x = 3\,125$

- a) $4^{1-3x} = 2^{x-2} \Leftrightarrow (2^2)^{1-3x} = 2^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2-6x} = 2^{x-2}$
Como las bases son iguales, también deben serlo sus exponentes:
 $2 - 6x = x - 2 \Rightarrow 7x = 4 \Rightarrow x = 4/7$
b) $3^x - 3^{-x} = \frac{80}{9} \Rightarrow 3^{2x} - 1 = \frac{80 \cdot 3^x}{9} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 9 \cdot 3^{2x} - 80 \cdot 3^x - 9 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3^x = \frac{80 \pm \sqrt{6400 + 81 \cdot 4}}{18} = \frac{80 \pm 82}{18} = \left\{ \frac{1}{9} \right\}$
Si $3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow x = -2$.
Si $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$.

- c) $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21 \Rightarrow 3^x - \frac{3^x}{3} + \frac{3^x}{3^2} = 21 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 9 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x + 3^x = 189 \Rightarrow 7 \cdot 3^x = 189 \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$
d) $9^x - 8 \cdot 3^{x+1} - 81 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 24 \cdot 3^x - 81 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (3^x = t), t^2 - 24t - 81 = 0 \Rightarrow t = 27 \text{ y } t = -27 \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 3.$
e) $4^x - 50 \cdot 2^x = 9984 \Leftrightarrow 2^{2x} - 50 \cdot 2^x = 9984 \Leftrightarrow$
 $2^{2x} - 50 \cdot 2^x - 9984 = 0$
Haciendo $2^x = t$, se tiene: $t^2 - 50t - 9984 = 0$, cuyas soluciones son $t = 128$ y $t = -78$.
Si $t = 128 \Rightarrow 2^x = 128 \Rightarrow x = 7$ (basta observar que $128 = 2^7$)
Si $t = -78 \Rightarrow 2^x = -78$, que no puede ser.
f) $25^x - 100 \cdot 5^x = 3\,125 \Rightarrow 5^{2x} - 100 \cdot 5^x - 3\,125 = 0$.
Haciendo $t = 5^x$ se tiene que $t^2 - 100t - 3\,125 = 0$, cuyas soluciones son: $t = 125$ y $t = -25$.
Si $t = 125 \Rightarrow 5^x = 125 = 5^3 \Rightarrow x = 3$
Si $t = -25 \Rightarrow 5^x = -25$, que no puede ser.

14. Resuelve:

- a) $e^{2x-2} = 1$ b) $e^{-10x} = 4$
c) $(x^2 - 2x + 1)e^x = 0$ d) $1 + 2e^x = 2$

- a) $e^{2x-2} = 1 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

- b) $e^{-10x}=4 \Rightarrow \ln(e^{-10x})=\ln 4 \Rightarrow -10x \ln e=\ln 4 \Rightarrow$
 $x=\frac{1,38629}{-10}=-0,138629$
 c) $(x^2-2x+1)e^x=0 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1.$
 d) $1+2e^x=2 \Rightarrow 2e^x=1 \Rightarrow e^x=1/2 \Rightarrow \ln(e^x)=\ln(0,5) \Rightarrow$
 $x \ln e=\ln 0,5 \Rightarrow x=-0,6931.$

15. Halla el valor de x en las siguientes ecuaciones:

- a) $\log_6 x=3$ b) $\log_5 x=2,5$
 c) $\log_7 3x=-0,2$ d) $\log x=-4$
 e) $\ln x=3,2$ f) $\log_{16} 4=x$

- a) $x=6^3=216$
 b) $x=5^{2,5}=55,9$
 c) $3x=7^{-0,2} \Rightarrow x=0,226$
 d) $x=10^{-4}=0,0001$
 e) $x=e^{3,2}=24,53$
 f) $16^x=4 \Rightarrow 2^{4x}=2^2 \Rightarrow 4x=2 \Rightarrow x=1/2$

16. Resuelve las ecuaciones:

- a) $\log_6 140=x$
 b) $\log_x 100=-2$
 c) $\log_2 8x=7$
 d) $4\log_2(8x+1)=16$

- a) $\log_6 140=x \Leftrightarrow 140=6^x \Rightarrow \log 140=x \log 6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x=\frac{\log 140}{\log 6}=2,7580$
 (Nótese que ésta es la fórmula del cambio de base.)
 b) $\log_x 100=-2 \Leftrightarrow 100=x^{-2} \Rightarrow 100=\frac{1}{x^2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2=\frac{1}{100} \Rightarrow x=\frac{1}{10}$
 c) $\log_2 8x=7 \Rightarrow 8x=2^7=128 \Rightarrow x=16.$
 d) $4 \log_2(2x+1)=16 \Rightarrow \log_2(2x+1)=4 \Rightarrow 2x+1=2^4 \Rightarrow$
 $x=15/2$

17. Resuelve las ecuaciones:

- a) $3 + \log(x + 1000) = 7$
 b) $\log(x + 6) - 2 \cdot \log(x - 3) = 1$
 c) $\log(2x + 2) - \log(x - 3) = 1$
 d) $\log(3^{2x-2} + 7) = 2\log(3^{x-1} + 1)$

- a) $3 + \log(x + 1000) = 7 \Rightarrow \log(x + 1000) = 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x + 1000 = 10000 \Rightarrow x = 9000$
 b) $\log(x + 6) - 2 \cdot \log(x - 3) = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log(x+6) - \log(x-3)^2 = \log 10 \Rightarrow \log \frac{x+6}{(x-3)^2} = \log 10$
 $\Rightarrow \frac{x+6}{(x-3)^2} = 10.$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene $x=4$ y $x=2,1$. Sólo vale $x=4$, pues si $x=2,1$ la ecuación no podría escribirse.

- c) $\log(2x + 2) - \log(x - 3) = 1 \Rightarrow \log \frac{2x+2}{x-3} = 1 \Rightarrow \frac{2x+2}{x-3} = 10$
 $\Rightarrow 2x + 2 = 10x - 30 \Rightarrow 8x = 32 \Rightarrow x = 4.$
 d) $\log(3^{2x-2} + 7) = 2\log(3^{x-1} + 1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log(3^{2x-2} + 7) = \log(3^{x-1} + 1)^2 \Rightarrow 3^{2x-2} + 7 = (3^{x-1} + 1)^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3^{2x-2} + 7 = 3^{2x-2} + 2 \cdot 3^{x-1} + 1 \Rightarrow 6 = 2 \cdot 3^{x-1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2.$

18. Resuelve los sistemas:

- a) $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x^2 + 2\log y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x^3 - \log y^2 = \log 24 \\ \log x - \log y = \log 5 \end{cases}$

- a) $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x^2 + 2\log y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ 2\log x + 2\log y = 2 \end{cases}$
 Restando ($E1 - E2$): $-5\log y = 5 \Rightarrow \log y = -1 \Rightarrow y = 1/10$
 Sustituyendo en $E1$: $2\log x + 3 = 7 \Rightarrow 2\log x = 4 \Rightarrow$
 $\log x = 2 \Rightarrow x = 100$
 b) $\begin{cases} \log x^3 - \log y^2 = \log 24 \\ \log x - \log y = \log 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\log x - 2\log y = \log 24 \\ \log x - \log y = \log 5 \end{cases}$
 Operando ($E1 - 3E2$): $\log y = \log 24 - 3\log 5 \Rightarrow \log y = \log \frac{24}{5^3}$
 $\Rightarrow y = \frac{24}{125}$
 Sustituyendo en $E2$: $\log x = \log 5 + \log y \Rightarrow$
 $\log x = \log \left(5 \cdot \frac{24}{125} \right) \Rightarrow x = \frac{24}{25}$

19. Resuelve los siguientes sistemas:

- a) $\begin{cases} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log x^2 - \log y = 3 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} \log 125^x - \log 25^y = 2\log 5 \\ \log 4^x - \log 64^y = \log 8 \end{cases}$

- a) $\begin{cases} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log x^2 - \log y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ 2\log x - \log y = 3 \end{cases} \Rightarrow$
 ($2E1 - E2$): $7\log y = 7 \Rightarrow y = 10; x = 100$
 b) $\begin{cases} \log 125^x - \log 25^y = 2\log 5 \\ \log 4^x - \log 64^y = \log 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log \frac{125^x}{25^y} = \log 5^2 \\ \log \frac{4^x}{64^y} = \log 8 \end{cases} \Rightarrow$
 $\begin{cases} \log \frac{5^{3x}}{5^{2y}} = \log 5^2 \\ \log \frac{2^{2x}}{2^{6y}} = \log 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log 5^{3x-2y} = \log 5^2 \\ \log 2^{2x-6y} = \log 2^3 \end{cases} \Rightarrow$
 $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x - 6y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 3/7; y = -5/14$

Tipo III. Aplicaciones de exponenciales y logaritmos

20. ¿Durante cuánto tiempo debes mantener 10000 € en un banco, a una tasa del 6,1 % anual, si quieres duplicar tu capital?
 a) A interés compuesto anual.
 b) Si los intereses se abonan mensualmente.
 a) $(1,061)^t = 2 \Rightarrow t \ln(1,061) = \ln 2 \Rightarrow t = 11,7$ años.
 b) $(1 + 1,061/12)^{12t} = 2 \Rightarrow 12t \ln(1 + 0,061/12) = \ln 2 \Rightarrow$
 $t = 11,4$ años.