4. Logaritmos

4.1. Potencias

Suponemos que el alumno ya está familiarizado con el uso de las potencias. No obstante, vamos a incluir aquí un pequeño repaso de los conceptos fundamentales.

Por ejemplo,

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$$

Una potencia se puede entender como una abreviatura de un producto de un número por sí mismo. En el ejemplo 4^3, 4 es la base de la potencia y 3 es el exponente.

Las potencias verifican las siguientes propiedades:

Si $a > 0$ y p, q son números cualesquiera, entonces:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$
- $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
- $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
- $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
- $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

Además, si m, n son números enteros, una potencia se puede convertir en una raíz mediante la siguiente relación

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Por tanto, todas las propiedades que verifican las potencias también las cumplen las raíces.

4.2. Definición de logaritmo. Propiedades

Un **logaritmo** es la operación inversa de una potencia. Por ejemplo, si $5^2 = 25$, diremos que el logaritmo en base 5 de 25 es 2, es decir, el logaritmo de un número es el exponente que al que hay que elevar la base para que resulte tal número. Esto que parece un trabalenguas quizá quede más claro en la siguiente definición:

$$\boxed{a^p = b \Leftrightarrow \log_a b = p}$$

donde $a > 0$.

Por ejemplo; $\log_5 25 = 2$, porque $5^2 = 25$; $\log_3 81 = 4$, porque, $3^4 = 81$; etc.

Debido a la relación entre los logaritmos y las potencias, todas las propiedades de éstas se traducen en propiedades de los logaritmos, que vamos a estudiar a continuación mediante ejemplos.

En primer lugar, observemos que sólo existen logaritmos de números positivos, por ejemplo, $\log_3(-3)$ no existe porque no hay ningún número al que se pueda elevar 3 para que resulte -3.

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

Por ejemplo, $\log_4 1 = 0$, porque $4^0 = 1$.

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Por ejemplo, $\log_5 5 = 1$, porque $5^1 = 5$.

$$\boxed{\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$$

Por ejemplo,

$$\log_2(4\cdot 16)=\log_2 4+\log_2 16.$$

En efecto; por una parte $\log_2(4\cdot 16)=\log_2 64=6$; y por otra, $\log_2 4=2$ y $\log_2 16=4$.

$$\boldsymbol{\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y}$$

Por ejemplo,

$$\log_3\left(\frac{243}{9}\right)=\log_3 243-\log_3 9$$

Ya que, $\log_3\left(\dfrac{243}{9}\right)=\log_3 27=3$ y, por otra parte; $\log_3 243=5$ y $\log_3 9=2$.

$$\boldsymbol{\log_a x^p=p\cdot\log_a x}$$

Por ejemplo,

$$\log_2 8^3=\log_2 8\cdot\log_2 8\cdot\log_2 8=3\cdot\log_2 8$$

Esta última propiedad se puede aplicar también al caso de una raíz, por ejemplo,

$$\log_2\sqrt{8}=\log_2 8^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\log_2 8=\frac{3}{2}$$

ACTIVIDADES

12. Calcular el valor de los siguientes logaritmos haciendo uso de las propiedades adecuadas para simplificarlos:

a) $\log_2\sqrt{32}$ b) $\log_3\left(\dfrac{1}{9}\right)$ c) $\log_5\left(\dfrac{1}{5}\cdot 5^{-8}\right)$ d) $\log_6 1$ e) $\log_7\left(\dfrac{14}{2}\right)$

4.3. Fórmula del cambio de base

Hasta ahora los ejemplos que hemos hecho siempre se han podido calcular sin ayuda de calculadora, porque eran exactos. Sin embargo, algunos logaritmos no se pueden calcular de forma exacta. Por ejemplo, $\log_2 3$. Es evidente que el número al que hay que elevar 2 para que dé 3, es algún número entre 1 y 2, ya que 3, está entre 2 y 4. Para calcular este logaritmo hay que utilizar una calculadora.

Sin embargo, la calculadora sólo posee dos teclas que permiten calcular logaritmos de dos bases concretas:

Por una parte está la tecla $\boxed{\log}$ que permite calcular logaritmos en base 10. Por ejemplo, para calcular $\log_{10} 7$, pulsamos 7 y a continuación $\boxed{\log}$ y obtenemos,

$$\log_{10} 7=0'84509804...$$

Los logaritmos en base 10, se llaman **logaritmos decimales**, a veces se denotan $\log 7$, sin especificar la base, aunque puede resultar una notación confusa y creemos recomendable utilizar $\log_{10}$.

La otra tecla, que suele encontrarse al lado de la anterior, es $\boxed{\ln}$. Esta tecla sirve para calcular logaritmos en los que la base es el número e. Estos logaritmos, que se llaman **logaritmos neperianos** o *logaritmos naturales* se denotan $\ln 7 = \log_e 7$. Por ejemplo, podemos comprobar con la calculadora que $\ln 7 = 1'945910149...$

Nota: En los libros de matemática superior se utiliza indistintamente $\ln(x)$ o $\log(x)$ para referirse a los logaritmos neperianos, por esta razón la utilización de la notación $\log x$ puede resultar confusa para referirse a los logaritmos decimales y es preferible usar $\log_{10} x$. No obstante, lo importante es no confundirse y se puede usar cualquier notación siempre y cuando sepamos de qué estamos hablando.

Entonces, tenemos dos teclas en nuestra calculadora, una para los logaritmos decimales y otra para los logaritmos neperianos (base el número e), pero, ¿qué podemos hacer para calcular $\log_2 3$? Pues necesitamos expresar este logaritmo en alguna de las dos bases de la calculadora.

Veamos cómo hacerlo. Queremos calcular $x = \log_2 3$ lo que equivale, en forma de potencia, a la expresión $2^x = 3$.

Entonces, tomando logaritmos neperianos, se verifica $\ln 2^x = \ln 3$ y, utilizando las propiedades de los logaritmos, se puede escribir $x \cdot \ln 2 = \ln 3$.

Por último, despejando x, obtenemos

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1'584962501$$

Hemos comprobado entonces, que

$$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

Si hubiésemos utilizado logaritmos decimales, habríamos llegado a

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

En general, se verifica

$$\boxed{\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}}$$

Que es la fórmula que sirve para cambiar de base un logaritmo, con el objeto de poder calcularlo mediante la calculadora. Por supuesto, esta fórmula se puede usar también para cambiar a cualquier otra base, aunque evidentemente estas dos bases, 10 y e, son las bases a las que se suele cambiar, ya que son las únicas que aparecen en las calculadoras.

ACTIVIDADES

13. Calcular los siguientes logaritmos, utilizando la fórmula del cambio de base y la calculadora:
a) $\log_3 7$ b) $\log_{0'3} 4$ c) $\log_9 12'3$

14. Calcular el valor de x en las siguientes ecuaciones:
a) $3^x = 5$ b) $8^x = 5$ c) $10^x = 0'7$