5 Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

CRITERIOS DE EVALUACIÓN / **ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN**

A. Determinar si una desigualdad se mantiene o se altera al efectuar la misma transformación en los dos miembros.

1. Analiza la siguiente cadena de desigualdades, que conduce a un resultado absurdo, y señala en qué paso se ha cometido el error y en qué consiste éste.

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\log\left(\frac{1}{2}\right) > 3\log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2 > 3$$

B. Resolver inecuaciones lineales con una incógnita y dar la solución mediante conjuntos y por su representación gráfica.

2. Resuelve las siguientes inecuaciones expresando la solución en forma de conjunto y gráficamente.

a) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} - x + 2 \leqslant 5$ b) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+5}{2} > \frac{x}{2} - x$

C. Resolver gráficamente inecuaciones lineales con dos incógnitas.

3. Resuelve gráficamente la siguiente inecuación lineal.

$2x - y > 6$

D. Resolver inecuaciones polinómicas mediante factorización y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

4. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas expresando la solución en forma de conjunto.

a) $(x-1)^2 - (x+2)^2 + 3x^2 \leqslant -7x + 1$

b) $x^3 + 3x^2 - x \leqslant 3$

E. Resolver inecuaciones racionales mediante factorización y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

5. Resuelve la siguiente inecuación expresando la solución en forma de conjunto y gráficamente.

$$\frac{4 - x^2}{x^2 - 4x} \leqslant 0$$

F. Resolver sistemas de dos o más inecuaciones con una incógnita y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

6. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales y expresa la solución en forma de conjunto y gráficamente.

$$\begin{cases} 2x - 3 \leqslant 5 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases}$$

G. Resolver gráficamente sistemas de dos o más inecuaciones lineales con dos incógnitas.

7. Resuelve gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales y colorea la región factible.

$$\begin{cases} x > 1 \\ x + y - 5 < 0 \\ 2x + y < 7 \\ y + 1 > 0 \end{cases}$$

8. Representa la región del plano limitada por los siguientes semiplanos.

$$\begin{cases} |-x + 3y| < 2 \\ |2x - y| < 3 \end{cases}$$

H. Plantear y resolver problemas que den lugar a inecuaciones o sistemas de inecuaciones de los estudiados en esta unidad.

9. Calcula todos los números que verifican que su cuadrado menos su doble es negativo.

1. $\frac{1}{4} > \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\log\left(\frac{1}{2}\right) > 3\log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2 > 3$

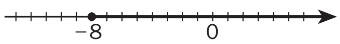
Los tres primeros pasos son correctos, ya que en el 1.º solo hemos expresado los números en forma potencial, por lo que no varía la expresión; en el 2.º tomamos logaritmos decimales que al ser una función creciente mantiene la desigualdad; y en el tercer paso aplicamos propiedades de los logaritmos para bajar los exponentes. En el cuarto dividimos los dos términos de la desigualdad por log(0,5), que es un número negativo, por lo que la desigualdad debe cambiar de sentido y así obtendríamos $2 < 3$.

2. a) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} - x + 2 \leqslant 5$

$\frac{7x + 2x + 2 - 14x}{14} \leqslant 3 \Rightarrow \frac{-5x+2}{14} \leqslant 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5x + 2 \leqslant 42 \Rightarrow -5x \leqslant 40 \Rightarrow x \geqslant \frac{40}{-5} = -8$

Solución: $[-8, +\infty)$

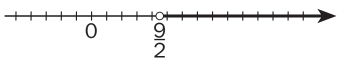


b) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+5}{2} > \frac{x}{2} - x$

$\frac{6x - 2 - 5x - 25}{10} > \frac{5x - 10x}{10} \Rightarrow \frac{x - 27}{10} > \frac{-5x}{10}$

$x - 27 > -5x \Rightarrow -27 > -6x \Rightarrow x > \frac{9}{2}$

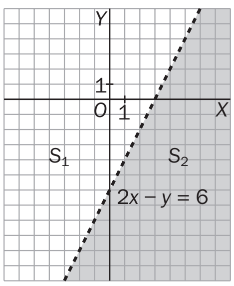
Solución: $\left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$



3. Comenzaremos por dibujar la recta $r \equiv 2x - y = 6$, para lo que bastará conocer dos puntos de la misma, $P = (0, -6)$ y $Q = (3, 0)$.

La recta anterior divide el plano en dos semiplanos S_1 y S_2. Tomamos un punto del semiplano S_1, por ejemplo el (0, 0) y comprobamos si verifica la inecuación.

$2 \cdot 0 - 0 > 6$. La solución será todo el semiplano S_2.



4. a) $(x-1)^2 - (x+2)^2 + 3x^2 \leqslant -7x + 1$

$x^2 - 2x + 1 - x^2 - 4x - 4 + 3x^2 \leqslant -7x + 1$

$3x^2 + x - 4 \leqslant 0$

$(x-1)(3x+4) \leqslant 0$

$-\infty \qquad -\frac{4}{3} \qquad 1 \qquad +\infty$

x − 1	−	−	+
3x + 4	−	+	+
(x − 1)(3x + 4)	+	−	+

Solución: $\left[-\frac{4}{3}, 1\right]$

b) $x^3 + 3x^2 - x \leqslant 3 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - x - 3 \leqslant 0$

$P(x) = (x+1)(x-1)(x+3) \leqslant 0$

$-\infty \qquad -3 \qquad -1 \qquad 1 \qquad +\infty$

x + 3	−	+	+	+
x + 1	−	−	+	+
x − 1	−	−	−	+
S	−	+	−	+

Solución: $(-\infty, -3] \cup [-1, 1]$

5. $\frac{4 - x^2}{x^2 - 4x} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{(2+x)(2-x)}{x(x-4)} \leqslant 0$

$-\infty \qquad -2 \qquad 0 \qquad 2 \qquad 4 \qquad +\infty$

x + 2	−	+	+	+	+
x	−	−	+	+	+
2 − x	+	+	+	−	−
x − 4	−	−	−	−	+
S	−	+	−	+	−

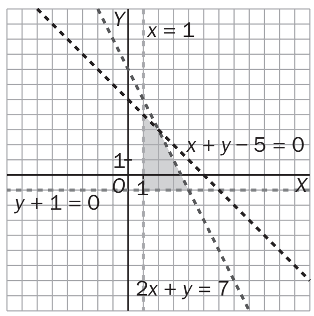
Solución: $(-\infty, -2] \cup (0, 2] \cup (4, +\infty)$

6. $\begin{cases} 2x - 3 \leqslant 5 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \leqslant 8 \\ (x-2)(x-6) < 0 \end{cases} \Rightarrow$

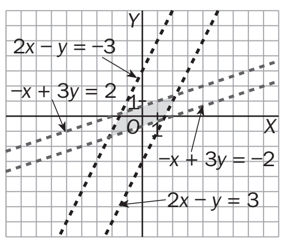
$\Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 4 \\ 2 < x < 6 \end{cases}$

Solución: (2, 4]

7. $\begin{cases} x > 1 \\ x + y - 5 < 0 \\ 2x + y < 7 \\ y + 1 > 0 \end{cases}$



8. $\begin{cases} -2 < -x + 3y < 2 \\ -3 < 2x - y < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 3y < 2 \\ -x + 3y > -2 \\ 2x + y < 3 \\ 2x - y > -3 \end{cases}$



9. $x^2 - 2x < 0 \Rightarrow x(x-2) < 0$

$-\infty \qquad 0 \qquad 2 \qquad +\infty$

x	−	+	+
x − 2	−	−	+
x(x − 2)	+	−	+

Solución: (0, 2)