6 Funciones

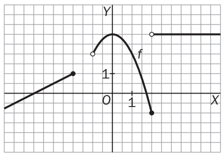
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

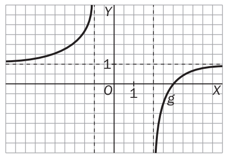
CRITERIOS DE EVALUACIÓN

A. Reconocer las variables, el dominio y el recorrido de una función a la vista de su gráfica.

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

1. Dadas las gráficas de las siguientes funciones, indica su dominio y recorrido:

a) 

b) 

B. Calcular el dominio de una función dada por su expresión algebraica.

2. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 3}$ b) $g(x) = \sqrt{x + 3}$ c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}}$

C. Operar aritméticamente con funciones y calcular el dominio de la función resultante.

3. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 2}$ y $g(x) = x^2 - 4$, realiza las operaciones indicadas y determina el dominio de las funciones que hayas obtenido.

a) $f + g$ b) $f - g$ c) $f \cdot g$ d) $\dfrac{f}{g}$

D. Encontrar la función compuesta de dos o más funciones y estudiar su dominio de definición.

4. Dadas las funciones $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = \sqrt{x + 2}$ y $t(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$, calcula las siguientes funciones y halla sus dominios de definición.

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $g \circ t$ d) $h \circ f$

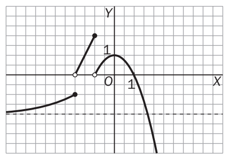
E. Calcular en casos sencillos la expresión algebraica y la representación gráfica de la función inversa de una dada.

5. Dada la función $f(x) = \dfrac{5}{x - 4}$:

a) Calcula su función inversa.
b) Calcula el dominio de f y de su inversa y represéntalas gráficamente.

F. Analizar las propiedades globales más importantes de una función a partir de su gráfica: continuidad, crecimiento, extremos relativos y tendencia.

6. La función f está representada a continuación:



a) Estudia la continuidad de f.
b) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
c) Halla las coordenadas de los máximos y mínimos relativos de f.
d) Estudia el comportamiento de f en $+\infty$ y $-\infty$.

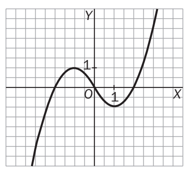
G. Representar gráficamente funciones definidas a trozos.

7. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \leqslant -2 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } -2 < x \leqslant 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ b) $g(x) = |x^2 - 2x - 4|$

H. Construir gráficas de funciones mediante traslaciones o dilataciones de una dada.

8. En la figura aparece la gráfica de la función f. A partir de ella, dibuja la gráfica de la función $g(x) = 3 + f(x + 2)$.



1. a) $D(f) = (-\infty, -2] \cup (-1, +\infty)$

$R(f) = (-\infty, 3]$

b) $D(g) = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

$R(g) = \mathrm{R} - \{1\}$

2. a) $D(f) = \{x \in \mathrm{R} \ / \ x + 3 \neq 0\} =$

$= \mathrm{R} - \{-3\}$

b) $D(g) = \{x \in \mathrm{R} \ / \ x + 3 \geqslant 0\} =$

$= [-3, +\infty)$

c) $D(h) = \{x \in \mathrm{R} \ / \ \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1} \geqslant 0\}$

Como $x^2 + 1 > 0$ para cualquier valor real, sigue que:

$D(h) = \{x \in \mathrm{R} \ / \ x^2 - 4 \geqslant 0\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

3. a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 2} + x^2 - 4 =$

$= \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 7}{x + 2}$

b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 2} - x^2 + 4 =$

$= \dfrac{-x^3 - x^2 + 4x + 9}{x + 2}$

c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 2} \cdot (x^2 - 4) =$

$= (x^2 + 1) \cdot (x - 2)$

Como $D(f) = \mathrm{R} - \{-2\}$ y $D(g) = \mathrm{R}$, los dominios de las tres funciones de los apartados anteriores serán $\mathrm{R} - \{-2\}$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\dfrac{x^2 + 1}{x + 2}}{x^2 - 4} = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$

Como $g(x) = 0$ si $x = 2$ o $x = -2$, $D\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathrm{R} - \{-2, 2\}$

4. a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 + 3 = x^2 + 4$

Como $D(f) = \mathrm{R}$ y $D(g) = \mathrm{R}$, $D(f \circ g) = \mathrm{R}$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x + 3) = (x + 3)^2 + 1 =$

$= x^2 + 6x + 10$

Como $D(g) = \mathrm{R}$ y $D(f) = \mathrm{R}$, $D(g \circ f) = \mathrm{R}$

c) $(g \circ t)(x) = g[t(x)] = g\left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right) = \left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right)^2 + 1 =$

$= \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{x^2 + 4x + 4}$

Como $D(g) = \mathrm{R}$, la única restricción que hay es donde no está definida t; por tanto, $D(g \circ t) = \mathrm{R} - \{-2\}$

d) $(h \circ f)(x) = h[f(x)] = h(x + 3) =$

$= \sqrt{(x + 3) + 2} = \sqrt{x + 5}$

Como $D(h) = [-2, +\infty)$, se debe ver cuándo ocurre que $x + 3 \geqslant -2$, y esto es cuando $x \geqslant -5$; por tanto, $D(h \circ f) = [-5, +\infty)$.

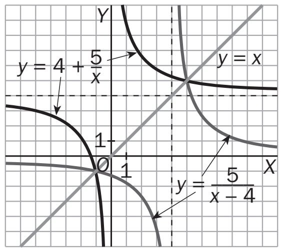
5. a) $y = \dfrac{5}{x - 4} \Rightarrow x = \dfrac{5}{y - 4} \Rightarrow xy - 4x = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = 4x + 5 \Rightarrow y = \dfrac{4x + 5}{x} = 4 + \dfrac{5}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 4 + \dfrac{5}{x}$

b) $D(f) = \mathrm{R} - \{4\}$

$D(f^{-1}) = \mathrm{R} - \{0\}$



6. a) f es continua en $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$.

b) f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0)$.

f es decreciente en $(0, +\infty)$.

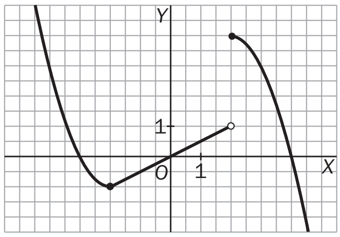
c) $(-1, 2)$ y $(0, 1)$ son máximos relativos.

f no tiene mínimos relativos.

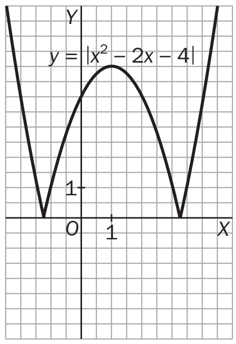
d) f tiende a -3 cuando x tiende a $-\infty$.

f tiende a $-\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

7. a)



b)



8.