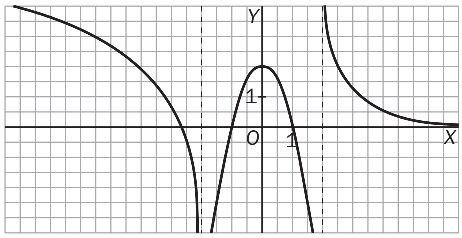
8 Límites y continuidad

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Analizar la tendencia de una función a la vista de una tabla de valores o una gráfica.

1. La gráfica describe el comportamiento de una función $f(x)$. Halla el límite de f en los siguientes casos.

a) $x \to +\infty$ c) $x \to -2$ e) $x \to 2^-$ g) $x \to 1$
b) $x \to -\infty$ d) $x \to 2^+$ f) $x \to 0$ h) $x \to -1$



B. Resolver, por métodos algebraicos, indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.

2. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 - 7x^2 + 12}{6x^3 + 3x^2 - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2 + 4x}{x^2 + x}}$

C. Interpretar gráficamente los resultados obtenidos en el cálculo de límites de funciones.

3. Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ que verifique, simultáneamente, las siguientes condiciones.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$ $f(-4) = 0$ $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ $f(0) = 2$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$

D. Hallar las asíntotas de una función a través del cálculo de límites.

4. Señala si las siguientes funciones tienen asíntotas verticales, horizontales u oblicuas, y determina sus expresiones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$

E. Determinar los intervalos de continuidad de una función dada por su expresión algebraica.

5. Halla el valor de k, sabiendo que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 4} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$

es continua en $x = 2$.

F. Determinar, y analizar de qué tipo son, las discontinuidades de una función dada por su expresión algebraica o por su gráfica.

6. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + x - 6}$ b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 5 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

7. Calcula el valor de a para el cual la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$.

MATERIAL FOTOCOPIABLE

1. a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

g) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

h) $\lim_{x \to -1} f(x) = 0$

2. a) Como tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 2$, el límite es de la forma $\frac{0}{0}$. Para resolverlo, se factorizan ambos polinomios y se simplifica.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x + 2)(x - 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x - 3}{x + 2} = -\frac{1}{4}$$

b) De nuevo es de la forma $\frac{0}{0}$, ya que el numerador y el denominador se anulan en $x = 0$. La indeterminación desaparece si se multiplican ambos términos por la expresión conjugada del denominador.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 + \sqrt{1 - x}\right)}{\left(1 - \sqrt{1 - x}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - x}\right)} =$$

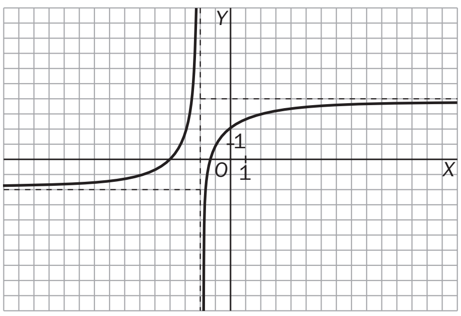
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 + \sqrt{1 - x}\right)}{x} = 2$$

c) Este límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolverlo se dividen los polinomios del numerador y denominador por x^3 y se simplifican los términos.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 12}{6x^3 + 3x^2 - 2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{5 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^3}}{6 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}} = \frac{5}{6}$$

3. Hay infinitas funciones con estas características, una de las posibles es:



4. a) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = 1$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{12}{0^-} = -\infty$$

A la vista de los resultados anteriores, la función presenta una asíntota horizontal en $y = 1$ y una asíntota vertical en $x = -2$. En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable.

b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} = -\infty \Rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

Si se efectúa la división indicada en la expresión de la función se obtiene:

$g(x) = x + 2 - \frac{1}{x + 1}$. Como $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$, se deduce que la recta $y = x + 2$ es la asíntota oblicua.

5. Para que f sea continua en $x = 2$, el límite en el punto tiene que coincidir con el valor de la función en él.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

Solución: $f(2) = k = 4$

6. a) Al ser $f(x)$ una función racional, será continua en todos los puntos menos en los que anulan el denominador $\{2, -3\}$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

Por tanto, en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable, y en $x = -3$, una discontinuidad asintótica.

b) Se trata de una función definida a trozos. Las funciones parciales son continuas en sus dominios, pues se trata de funciones polinómicas. Hay que estudiar la continuidad en los puntos de unión.

Para $x = 0$, $\lim_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1 \neq \lim_{x \to 0^+} (2x - 1) = -1$

La función es discontinua en $x = 0$. Presenta una discontinuidad de salto finito (2 unidades), ya que los límites laterales no coinciden.

Para $x = 3$, $\lim_{x \to 3^-} (2x - 1) = 5 = \lim_{x \to 3^+} 5 = f(3)$

La función es continua en $x = 3$.

7. Para que presente una discontinuidad evitable se necesita que $x = 1$ sea una raíz tanto del numerador como del denominador (que sí lo es). Por tanto, aplicando el teorema del resto: $1^2 + 1 + a = 0 \Rightarrow a = -2$.