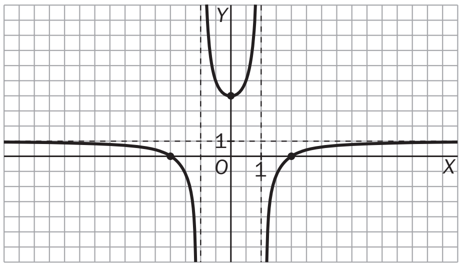
9 Funciones elementales

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Estudiar el signo, las simetrías y la periodicidad de una función dada por su expresión algebraica o por su gráfica.	**1.** A la vista de la gráfica de la función *f*, establece: a) Los puntos de corte con los ejes y el signo de la función. b) Si se trata de una función simétrica, y señala en su caso el eje o centro de simetría. 
B. Esbozar la gráfica de una función polinómica fácilmente factorizable.	**2.** Esboza la gráfica de la función polinómica $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$.
C. Representar y estudiar funciones racionales sencillas.	**3.** Realiza un estudio completo y dibuja la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 3x}$
D. Obtener la gráfica de funciones exponenciales y logarítmicas y conocer las relaciones entre las mismas.	**4.** Dibuja sobre los mismos ejes las gráficas de las funciones $f(x) = 4^x$ y $g(x) = \log_4 x - 1$ y explica qué relación hay entre dichas gráficas.
E. Representar gráficas de funciones trigonométricas sencillas.	**5.** A partir de la gráfica de cos x, dibuja la gráfica de la función $f(x) = 1 + 3\cos(2x)$.
F. Representar funciones relacionadas con la función parte entera.	**6.** Ayudándote de una tabla de valores, representa la función $f(x) = x + [x]$.
G. Representar gráficamente el valor absoluto de una función.	**7.** Representa la función: $f(x) = \begin{cases} \lvert x^2 - 1 \rvert & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$
H. Resolver problemas en los que las relaciones de dependencia entre magnitudes vengan dadas por las funciones estudiadas en esta unidad.	**8.** El número de bacterias, en miles, de cierto cultivo evoluciona en el tiempo según la función $N(t) = 5 + 3^{\frac{t-1}{2}}$, en donde t se mide en horas. a) ¿Cuántos miles de bacterias habrá al cabo de 6 horas? b) Calcula a partir de qué instante el número de bacterias superará las 23 000.

1. a) Puntos de corte con los ejes: $(-2, 0)$, $(0, 4)$ y $(2, 0)$.

Para estudiar el signo de la función consideramos los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$.

$-\infty$ a -2	-2 a -1	-1 a 1	1 a 2	2 a $+\infty$
+	−	+	−	+

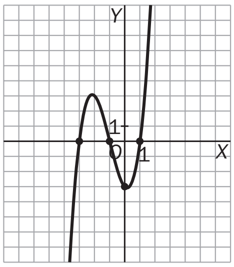
b) Se observa que es una función simétrica respecto del eje de ordenadas. La función es par, ya que:

$$f(-x) = f(x)$$

2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $f(0) = -3$

La función corta el eje horizontal en los puntos $(-3, 0)$, $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, y el eje vertical en $(0, -3)$. Con los datos anteriores podemos esbozar la gráfica, aunque si obtenemos algún otro valor, podremos dibujar esta con mayor precisión.



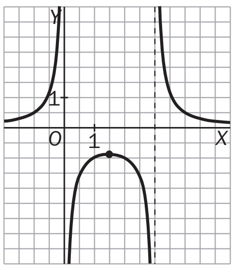
3. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 3x} = \dfrac{2}{x(x - 3)}$

Vemos que la función no está definida ni en $x = 0$ ni en $x = 3$, en donde presenta asíntotas verticales.

Asimismo tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, ya que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

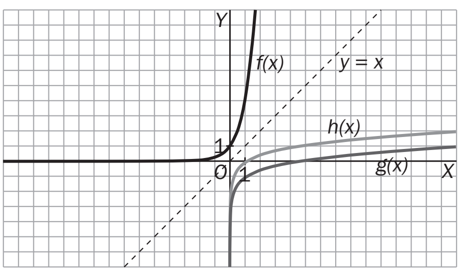
Podemos calcular algún otro punto de la función como $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-8}{9}\right)$.

Con esta información esbozamos la gráfica.

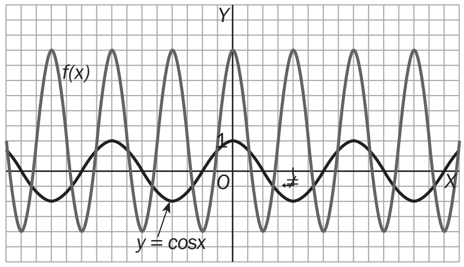


4. A partir de la gráfica de $f(x) = 4^x$ dibujamos la función $h(x) = \log_4 x$, ya que ambas son simétricas respecto de la recta $y = x$ por ser funciones inversas.

Para dibujar $g(x) = \log_4 x - 1$ sometemos la función $h(x)$ a una traslación de vector $(0, -1)$.

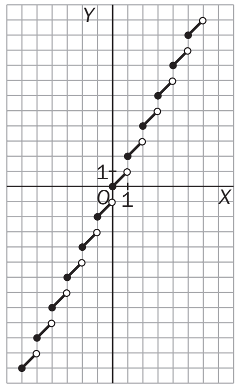


5. Al multiplicar por 3 aumentamos en tres veces la amplitud; al sumar 1 desplazamos verticalmente la gráfica una unidad hacia arriba; al multiplicar el argumento por 2, reducimos el período a la mitad, con lo que resulta la gráfica dibujada.

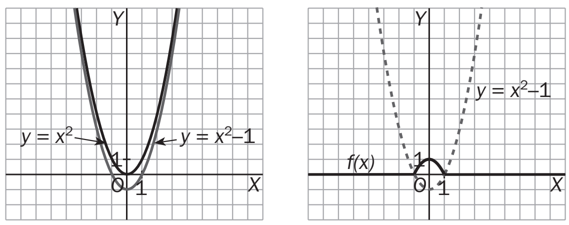


6. En la tabla se dan algunos valores. Se obtiene la gráfica adjunta.

X	$[x]$	$f(x)$
−2	−2	−4
−1,5	−2	−3,5
−1	−1	−2
−0,3	−1	−1,3
0	0	0
0,3	0	0,3
0,7	0	0,7
1	1	2
1,4	1	2,4
1,9	1	2,9
2	2	4



7.



8. a) $N(6) = 5 + 3^{\frac{5}{2}} = 20{,}588$

$\Rightarrow$ 20 588 bacterias.

b) $5 + 3^{\frac{t-1}{2}} > 23 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{\frac{t-1}{2}} > 18 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{t - 1}{2} \log 3 > \log 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow t > \dfrac{2 \log 18}{\log 3} + 1 = 6{,}26 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Para $t > 6{,}26$ horas