# 10 Derivadas

## CRITERIOS DE EVALUACIÓN

## ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

**A.** Calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo y la tasa de variación instantánea de una función en un punto.

**1.** Tras realizar un viaje de estudios, los alumnos redactan un informe en el que aparece la siguiente tabla.

| | Salida | | | | Llegada destino |
|---|---|---|---|---|---|
| **Hora** | 9.00 | 9.30 | 10.15 | 11.30 | 12.00 |
| **Distancia al instituto** | 0 km | 50 km | 170 km | 290 km | 320 km |

¿Cuál fue la velocidad media en el viaje?

¿Qué velocidad media llevaron en el intervalo [9.30, 10.15]? ¿Y en el intervalo [9.30, 11.30]?

¿Qué velocidad media llevaron en la primera media hora del viaje? ¿Y en la última media hora?

**B.** Calcular la derivada de una función en un punto aplicando la definición y conocer y aplicar su interpretación geométrica.

**2.** a) Dada la función $f(x) = x^2 - 5$, calcula, utilizando la definición, la derivada de dicha función en los puntos de abscisa $x = -2$ y $x = 2$.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa $x = 2$.

**3.** ¿En qué puntos la tangente a la curva $y = 6x^3 + 9x^2 - 2$ es paralela al eje $X$?

**4.** Calcula los puntos en los que la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 5$$

tiene tangente paralela a la recta de ecuación $y = 2x - 6$.

**C.** Calcular la función derivada de funciones elementales o de funciones obtenidas mediante operaciones algebraicas con funciones elementales.

**5.** Calcula la función derivada de las siguientes funciones.

a) $y = (x^2 - 5)^6$

b) $y = \sqrt[5]{3x^2}$

c) $y = (1 - 5x)^3$

d) $y = (x^2 + 4)(3x^3 + 1)$

e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

f) $y = \dfrac{x^3 - x + 3}{x^2 - 4}$

**D.** Calcular las derivadas sucesivas de funciones elementales.

**6.** Calcula las derivadas 1.ª, 2.ª y 3.ª de la función $y = \text{sen}\, x$. A partir de los resultados obtenidos, averigua cuál será la derivada 8.ª de dicha función.

**E.** Calcular la función derivada de una función obtenida mediante la composición de dos o más funciones elementales.

**7.** Calcula la función derivada de las siguientes funciones.

a) $y = \left(\ln(2^x + x)\right)^3$

b) $y = \text{sen}\left(\sqrt{2x^3 - 3x}\right)$

**F.** Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función y los máximos y mínimos absolutos y relativos.

**8.** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 3$.

**9.** Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ en el intervalo $[-2, 3]$.

**G.** Aplicar las derivadas en la resolución de problemas de optimización.

**10.** El beneficio neto mensual, en miles de euros, de una empresa que fabrica camiones viene dado por la función $B(x) = 12x - x^3$, donde $x$ es el número de camiones fabricados en un mes.

a) Calcula la producción mensual que hace máximo el beneficio.

b) Calcula el beneficio máximo correspondiente a dicha producción.

# Soluciones

**1.** Si se denomina $e(t)$ a la distancia recorrida:

$$v_{[9,\,12]} = \frac{e(12) - e(9)}{3} = \frac{320 - 0}{3} = 106{,}\widehat{6} \text{ km/h}$$

$$v_{[9.30,\,10.15]} = \frac{e(10.15 \text{ h}) - e(9.30 \text{ h})}{0{,}75} = \frac{120}{0{,}75} = 160 \text{ km/h}$$

$$v_{[9.30,\,11.30]} = \frac{e(11.30 \text{ h}) - e(9.30 \text{ h})}{2} = \frac{240}{2} = 120 \text{ km/h}$$

$$v_{[9,\,9.30]} = \frac{50}{0{,}5} = 100 \text{ km/h}; \quad v_{[11.30,\,12]} = \frac{30}{0{,}5} = 60 \text{ km/h}$$

**2.** a) $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 5 - (-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = 4$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(-2 + h)^2 - 5 - (-1)}{h} = \frac{h^2 - 4h}{h} = 4$$

b) $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$;

$y + 1 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 9$

**3.** $y' = 18x^2 + 18x$;

$$y' = 0 \Rightarrow 18x(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

En $x = 0$, la ecuación de la tangente es $y = -4$.

En $x = -1$, la ecuación de la tangente es $y = -1$.

**4.** $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 5$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 7$

$f'(x) = 2 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 7 = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 108}}{6} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $[-3, f(-3)]$ es:

$$y - 26 = 2(x + 3) \to y = 2x + 32$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $[1, f(1)]$ es:

$$y - 2 = 2(x - 1) \to y = 2x$$

**5.** a) $y' = 6(x^2 - 5)^5 \cdot 2x = 12x(x^2 - 5)^5$

b) $y' = (3x^2)^{\frac{1}{5}}$

$$y' = \frac{1}{5}(3x^2)^{\frac{-4}{5}}(6x) = \frac{6x}{5\sqrt[5]{81x^8}} = \frac{6}{5\sqrt[5]{81x^3}}$$

c) $y' = 3(1 - 5x)^2(-5) = -15(1 - 5x)^2$

d) $y' = 2x(3x^3 + 1) + (x^2 + 4)9x^2 = 15x^4 + 36x^2 + 2x$

e) $y' = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

f) $y' = \frac{(3x^2 - 1)(x^2 - 4) - 2x(x^3 - x + 3)}{(x^2 - 4)^2} =$

$$= \frac{x^4 - 11x^2 - 6x + 4}{(x^2 - 4)^2}$$

**6.** $y' = \cos x \qquad y'' = -\text{sen } x$

$y''' = -\cos x \qquad y'''' = \text{sen } x$

En la 4.ª derivada vuelve a aparecer la función sen $x$ con signo positivo 4, con lo cual, si continuamos derivando, volverán a repetirse las expresiones cos $x$, $-$sen $x$, $-$cos $x$, sen $x$.

Por tanto, podemos concluir que la derivada octava de la función $y = \text{sen}\, x$ será ella misma.

**7.** a) $y' = 3\big(\ln(2^x + x)\big)^2\big(\ln(2^x + x)\big)' =$

$$= 3\big(\ln(2^x + x)\big)^2 \cdot \frac{(2^x + x)'}{2^x + x} =$$

$$= 3\big(\ln(2^x + x)\big)^2 \cdot \frac{2^x \ln 2 + 1}{2^x + x}$$

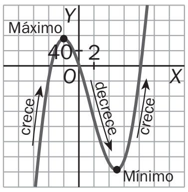
b) $y' = \cos\big(\sqrt{2x^3 - 3x}\big) \cdot \frac{6x^2 - 3}{2\sqrt{2x^3 - 3x}}$

**8.** $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 3$; $f'(x) = 6x^2 - 18x - 60$

$f'(x) > 0 \Rightarrow 6(x - 5)(x + 2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$.

Por tanto, concluimos que la función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 5)$. En el punto $-2$ presenta un máximo relativo, y en el punto 5, un mínimo relativo.



**9.** Los posibles máximos y mínimos relativos estarán en los puntos de derivada nula:

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x + 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \{-1, 0, 2\}$

Aplicando el criterio de la segunda derivada:

$f''(x) = 36x^2 - 24x - 24$

$f''(-1) = 36 > 0$; $f''(0) = -24 < 0$; $f''(2) = 72 > 0$.

Por tanto, en $x = -1$ y $x = 2$ hay mínimos relativos, y en $x = 0$, un máximo relativo.

Para determinar los extremos absolutos, se halla el valor de la función en los extremos del intervalo y en las abscisas de los extremos relativos:

$f(-2) = 33$, $f(-1) = -4$, $f(0) = 1$, $f(2) = -31$, $f(3) = 28$

Por tanto, el máximo absoluto corresponde al punto $(-2, 33)$, y el mínimo absoluto, a $(2, -31)$.

**10.** a) Calculamos la derivada:

$B(x) = 12x - x^3$

$B'(x) = 12 - 3x^2$; $B'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

La función $B(x)$ no está definida para los números negativos, ya que el número de camiones fabricados debe ser mayor o igual que cero.

Para comprobar qué tipo de punto corresponde a $x = 2$ calculamos el signo de la segunda derivada:

$B''(x) = -6x$ , $\qquad B''(2) = -12$

Por tanto, en $x = 2$ la función beneficio presenta un máximo relativo.

b) $B(2) = 24 - 8 = 16$; el beneficio máximo será, por tanto, de 16000 €.