14 Distribuciones discretas. La distribución binomial

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Obtener la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta (v.a.d.).	**1.** Las camadas de lobo ibérico suelen constar de 5 cachorros y la probabilidad de nacimientos de ambos sexos coincide. Consideremos la variable aleatoria X = "número de hembras en una camada de lobo ibérico". a) Esa variable aleatoria ¿es discreta o continua? Justifica tu respuesta. b) Determina la función de probabilidad de esta variable aleatoria y represéntala gráficamente.
B. Calcular los parámetros de una v.a.d., media o esperanza matemática, varianza y desviación típica.	**2.** La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X. x: 0, 1, 2, 3 $P(X = x)$: 0,2, a, b, 0,25 a) Sabiendo que $E(X) = 1{,}55$ halle el valor de a y de b. b) Calcule Var (X).
C. Determinar si una función puede ser función de probabilidad asociada a una v.a.d.	**3.** Calcula el valor de k para que la siguiente función sea una función de probabilidad. $P(X = k) = \begin{cases} \frac{k}{x} & x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$
D. Calcular, utilizando la función de probabilidad, la probabilidad de que una v.a.d. tome unos valores concretos.	**4.** La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X viene dada por $P(X = x) = k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$, para $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ a) Halla el valor de k. b) Calcula las siguientes probabilidades: $P(X < 6)$; $P(X \geqslant 3)$
E. Aplicar las propiedades de los números combinatorios.	**5.** Reduce la siguiente expresión a un número combinatorio $\binom{x}{12} + \binom{x}{13} + \binom{x+1}{14}$
F. Desarrollar la potencia de un binomio mediante la fórmula del binomio de Newton.	**6.** Escribe el desarrollo completo de $(2x - 5)^5$.
G. Calcular la expresión algebraica de algunos de los términos de la potencia de un binomio.	**7.** ¿Cuál es el coeficiente de x^{10} de $(2 - 3x^2)^7$?
H. Calcular la función de probabilidad y los parámetros de una v.a.d. que sigue un modelo binomial.	**8.** Para formar el jurado de un premio, se elige al azar a seis alumnos de Bachillerato de una provincia, de los cuales el 35% son hombres. ¿Cuántos hombres hay en el jurado?
I. Asignar probabilidades a sucesos de carácter binomial.	**9.** En una ciudad hay una epidemia de gripe que afecta al 10% de la población. Calcula la probabilidad de que elegidas 5 personas al azar se den los siguientes casos. a) Exactamente 2 personas tengan gripe. b) Al menos 2 personas tengan gripe.
J. Resolver problemas de ajuste de distribuciones empíricas por distribuciones binomiales.	**10.** Un jugador de baloncesto efectúa 500 series de tres tiros libres obteniendo los siguientes resultados. N.º de aciertos por serie: 0, 1, 2, 3 N.º de series: 110, 213, 144, 33 a) ¿Es factible ajustar esta distribución de datos por una binomial? En caso afirmativo determina la $B(n, p)$ que mejor se ajuste a esos datos empíricos. b) Valora la bondad del ajuste.

1. a) Se trata de una variable aleatoria discreta que solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4 y, 5.

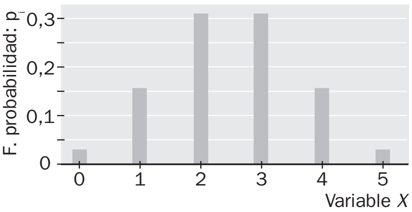
b) Para calcular la probabilidad de cada posible valor de la variable observamos que estamos ante una binomial de parámetros

$n = 5$; $p = 0{,}5$ y por tanto

$P(X = 0) = 0{,}0313$ $\quad$ $P(X = 3) = 0{,}3125$

$P(X = 1) = 0{,}1563$ $\quad$ $P(X = 4) = 0{,}1563$

$P(X = 2) = 0{,}3125$ $\quad$ $P(X = 5) = 0{,}0313$



2. a) Por ser una distribución de probabilidad debe cumplirse que:

$0{,}2 + a + b + 0{,}25 = 1 \rightarrow a + b = 0{,}55$

$\mu = a + 2b + 0{,}75 = 1{,}55 \rightarrow a + 2b = 0{,}80$

Resolviendo el sistema: $a = 0{,}30$ y $b = 0{,}25$

b) $\sigma = 0 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}25 + 9 \cdot 0{,}25 - 1{,}55^2 = 1{,}17$

3. Por ser una función de probabilidad debe cumplir que

$$\frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1 \rightarrow \frac{25k}{12} = 1 \rightarrow k = \frac{12}{25}$$

4. a) Por ser una función de probabilidad, la suma de todas las probabilidades debe de ser igual a 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = k \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \cdot k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

b) $$P(X < 6) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^5\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6 - \frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{211}{243}$$

$$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - \left(\frac{12}{23} + \frac{14}{29}\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

5. $$\binom{x}{12} + \binom{x}{13} + \binom{x+1}{14} = \binom{x+1}{13} + \binom{x+1}{14} = \binom{x+2}{14}$$

6. $$(2x - 5)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5 - \binom{5}{1}(2x)^4 \cdot 5 + \binom{5}{2}(2x)^3 \cdot 5^2 -$$

$$- \binom{5}{3}(2x)^2 \cdot 5^3 + \binom{5}{4}(2x) \cdot 5^4 + \binom{5}{5}5^5 = 32x^5 -$$

$$- 5 \cdot 16x^4 \cdot 5 + 10 \cdot 8x^3 \cdot 25 - 10 \cdot 4x^2 \cdot 125 + 5 \cdot 2x \cdot 625 -$$

$$- 3125 = 32x^5 - 400x^4 + 200x^3 - 5000x^2 + 1250x - 3125$$

7. $$-\binom{7}{5}2^2 \cdot 3^5 = -21 \cdot 4 \cdot 243 = -20\,412$$

8. Sea X la variable que indica el número de hombres elegidos en el jurado.

P(elegir hombre) $= 0{,}35$

Se trata de una binomial de parámetros $n = 6$ y $p = 0{,}35$.

Por tanto el número de hombres esperado es:

$n \cdot p = 6 \cdot 0{,}35 = 2{,}1 \Rightarrow 2$ hombres

9. La variable aleatoria X = número de personas con gripe sigue una distribución binomial $B(5;\ 0{,}1)$, por tanto:

a) $P(X = 2) = 0{,}0729$

b) $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$

$= 1 - 0{,}5905 - 0{,}3281 = 0{,}0814$

10. a) Si la probabilidad de que el jugador encestase una canasta la consideremos constante, estaríamos ante una binomial ya que:

I. Al tirar a canasta sólo son posibles dos resultados acertar o fallar.

II. El resultado de cada lanzamiento es independiente del resultado de los demás.

III. La probabilidad de acierto se mantiene constante.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
0	110	0
1	213	213
2	144	288
3	33	99
	500	600

$\bar{x} = \frac{600}{500} = 1{,}2$

$\bar{x} = 1{,}2 = 3 \cdot p$

$p = 0{,}4$

$q = 0{,}6$

La distribución empírica la ajustaríamos mediante una $B(3,\ 0.4)$.

b) Para valorar la bondad del ajuste estudiamos, según el modelo teórico, en cuántas series el jugador anotaría 0, 1, 2 ó 3 de los tres tiros libres. Para ello calculamos $P(X = k)$ para $k = 0, 1, 2$ y 3. Después se multiplica por 500

$P(X = 0) = 0{,}216$ $\quad$ $500 \cdot 0{,}216 = 108$

$P(X = 1) = 0{,}432$ $\quad$ $500 \cdot 0{,}432 = 216$

$P(X = 2) = 0{,}288$ $\quad$ $500 \cdot 0{,}288 = 144$

$P(X = 3) = 0{,}064$ $\quad$ $500 \cdot 0{,}064 = 32$

Los resultados se ordenan en la siguiente tabla:

Número de aciertos	0	1	2	3
N.º series observadas	110	213	144	33
N.º series esperadas	108	216	144	32

Analizamos la diferencia entre los datos reales y los esperados y se observa que hay muy poca diferencia, por tanto el ajuste es bueno.