# 15 Distribuciones continuas. La distribución normal

## CRITERIOS DE EVALUACIÓN

## ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

**A.** Conocer las características de una distribución continua.

**1.** De cierta variable aleatoria, $X$, conocemos que puede tomar cualquier valor perteneciente al intervalo $[-2\ ,\ 8]$, y que la probabilidad de que dicha variable tome un valor negativo es 0,2. Se pide lo siguiente.

a) La variable aleatoria $X$, ¿es discreta o continua? ¿Por qué?
b) Calcula $P(X > 0)$.

**B.** Determinar, en casos sencillos, si una determinada función se corresponde a una función de densidad asociada a una variable aleatoria continua.

**2.** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x \text{ si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$$

a) Represéntala gráficamente
b) Comprueba que es una función de densidad.
c) Calcula, apoyándote en la gráfica, $P(X \leqslant 1{,}5)$.

**C.** Dominar los procedimientos de tipificación y cálculo de probabilidades en distribuciones normales.

**3.** Sea $X$ una variable que sigue una distribución normal. $N(6,\ 2)$. Calcula las siguientes probabilidades

a) $P(X \leqslant 7)$ b) $P(4{,}5 \leqslant X \leqslant 5{,}5)$ c) $P(X > 5)$

**4.** La variable $X$ sigue una distribución $N(5;\ 1{,}5)$. Obtén el valora para que $P(X > a) = 0{,}72$.

**D.** Resolver problemas de v.a.c. de distribución $N(\mu,\ \sigma)$.

**5.** Las pilas de linterna de una marca determinada tienen una vida media, en horas, que se distribuye según una ley normal $N(80,\ 2)$. De una partida de 500 pilas, responde.

a) ¿Cuántas puede esperarse que duren entre 75 y 82 horas?
b) Si se consideran como pilas especiales a aquellas que están dentro del 20% de las que más duran: ¿a partir de qué tiempo de duración se considera que una pila es especial?

**E.** Determinar si una variable aleatoria discreta que siga una distribución $B(n,\ p)$ puede ajustarse mediante una normal.

**6.** Un tirador acierta en el blanco con probabilidad 0,8. Calcula la probabilidad de que al hacer seis disparos se den los siguientes casos.

a) No acierte ninguno. b) Acierte todos. c) Acierte como mucho 2.

Si suponemos que el tirador realiza 1000 disparos y su probabilidad de acierto se mantiene constante, ¿puede aproximarse la variable estadística que mide el número de aciertos en 1000 tiradas por una distribución normal? ¿Por cuál? Justifica tu respuesta.

De acuerdo con el resultado anterior, calcula la probabilidad de los siguientes casos.

d) El tirador acierte más de 810 disparos.
e) El número de aciertos esté entre 795 y 820, ambos incluidos.

**F.** Utilizar la distribución normal para calcular probabilidades surgidas en un caso binomial.

**7.** El examen teórico para obtener el carnet de conducir consiste en un cuestionario con 40 preguntas, cada una de las cuales ofrece tres posibles respuestas de las que solo una es válida.

Se considera a un aspirante apto si no falla más del 10% de las preguntas. Calcula la probabilidad de pasar el examen contestando el cuestionario al azar.

**G.** Resolver problemas de ajuste de distribuciones empíricas por distribuciones normales.

**8.** Se sabe que la media y la desviación típica de los pesos de 54 alumnos son $\mu = 66{,}39$ y $\sigma = 6{,}78$. para calcularlas se han utilizado los siguientes datos:

| **Peso (kg)** | [50-55) | [55-60) | [60-65) | [65-70) | [70-75) | [75-80) | [80-85) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **N.º alumnos** | 3 | 7 | 12 | 15 | 11 | 6 | 2 |

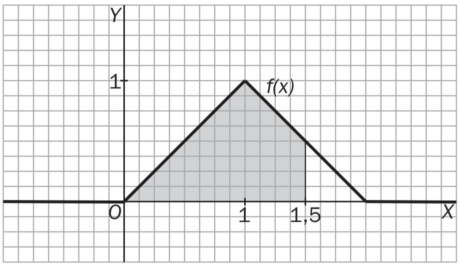
a) Representa los datos anteriores mediante un histograma y dibuja el polígono de frecuencias correspondiente.
b) A la vista de los datos anteriores ¿Crees oportuno ajustar dicha distribución empírica por una normal? ¿Por cuál?
c) Utiliza la distribución normal encontrada en el apartado anterior para calcular el porcentaje teórico de alumnos con un peso comprendido entre 58 y 73 Kg.

# Soluciones

**1.** a) $X$ es una variable aleatoria continua, ya que puede tomar cualquier valor real perteneciente al intervalo $(-2, 8)$.

b) $P(X > 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

**2.** a)



b) Claramente verifica todas las características de una función de densidad:

- $f(x) \geqslant 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.
- el área encerrada por dicha función y el eje $OX$ vale 1 (triángulo de base 2 y altura 1).

c) La probabilidad $P(X \leqslant 1{,}5)$ equivale al área de la región sombreada:

$$P(X \leqslant 1{,}5\ ) = 1 - \frac{0{,}5^2}{2} = 0{,}875$$

**3.** a) $P(X \leqslant 7) = P\left(Z \leqslant \frac{7-6}{2}\right) = P(Z \leqslant 0{,}5) = 0{,}6915$

b) $P(4{,}5 \leqslant X \leqslant 5{,}5) = P\left(\frac{4{,}5-6}{2} \leqslant Z \leqslant \frac{5{,}5-6}{2}\right) =$

$= P(-0{,}75 \leqslant Z \leqslant -0{,}25) = P(0{,}25 \leqslant Z \leqslant 0{,}75) =$

$= P(Z \leqslant 0{,}75) - P(Z \leqslant 0{,}25) = 0{,}7734 - 0{,}5987 =$

$= 0{,}1747$

c) $P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5-6}{2}\right) = P(Z > -0{,}5) =$

$= 1 - P(Z < 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

**4.** $0{,}72 = P(X > a) = P\left(Z > \frac{a-5}{1{,}5}\right) =$

$= 1 - P\left(Z \leqslant \frac{a-5}{1{,}5}\right) \Rightarrow P\left(Z \leqslant \frac{a-5}{1{,}5}\right) = 0{,}28$

Buscamos un número $A$ que cumpla

$P(Z \leqslant -A) = 0{,}72 \Rightarrow -A = 0{,}58$

$\frac{a-5}{1{,}5} = -0{,}58 \Rightarrow a = 5 - 0{,}58 \cdot 1{,}5 = 4{,}13$

**5.** a) $P(75 < X < 82) = P\left(\frac{75-80}{2} < Z < \frac{82-80}{2}\right) =$

$= P(-2{,}5 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -2{,}5) =$

$= P(Z < 1) - 1 + P(Z < 2{,}5) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}9938 =$

$= 0{,}8351$

83,51% de 500 = 417,55

418 pilas

b) $0{,}2 = P(X > a) = P\left(Z > \frac{a-80}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(Z \leqslant \frac{a-80}{2}\right) = 0{,}8 \Rightarrow \frac{a-80}{2} = 0{,}84$

$a = 81{,}68$. A partir de 82 horas.

**6.** Consideramos la variable que indica el número de tiros acertados, se trata de una binomial de parámetros $n = 6$ y $p = 0.8$.

a) $P(X = 0) = \binom{6}{0} \cdot 0{,}2^6 = 0{,}0006$

b) $P(X = 6) = \binom{6}{0} \cdot 0{,}8^6 = 0{,}2621$

c) $P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$= 0{,}0006 + 0{,}0015 + 0{,}0154 = \ 0{,}0175$

Nos encontramos ante una $B(1000, 0{,}8)$ con $n \cdot p \geqslant 5$ y $n \cdot q \geqslant 5$, por lo que podemos aproximarla por una normal de parámetros

$\mu = n \cdot p = 800$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{160} = 12{,}65$

d) $P(X > 810) = P(Y > 810{,}5) =$

$= P\left(Z > \frac{810{,}5 - 800}{12{,}65}\right) = P(Z > 0{,}83) =$

$= 1 - P(Z \leqslant 0{,}83) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}203$

e) $P(795 < X < 820) = P(794{,}5 < Y < 820{,}5) =$

$= P\left(\frac{794{,}5 - 800}{12{,}65} < z < \frac{820{,}5 - 800}{12{,}65}\right) =$

$= P(-0{,}43 < Z < 1{,}62) =$

$= P(Z < 1{,}62) - P(Z < -0{,}43) =$

$= P(Z < 1{,}62) - 1 + P(Z < 0{,}43) =$

$= 0{,}9474 - 1 + 0{,}6664 = 0{,}6138$

**7.** Estamos ante una binomial $B\left(40, \frac{1}{3}\right)$. Como $n \cdot p \geqslant 5$ y $n \cdot q \geqslant 5$, se puede aproximar por una normal de parámetros

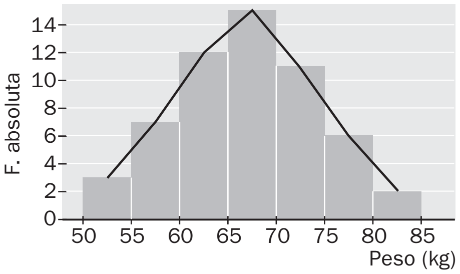
$\mu = n \cdot p = 13{,}3$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 2{,}98$

$P(X \geqslant 36) = P\left(Z > \frac{35{,}5 - 13{,}3}{2{,}98}\right) = P(Z \geqslant 7{,}45) =$

$= 1 - P(Z < 7{,}45) = 1 - 1 = 0$

**8.** a)



b) Si; por una $N(66{,}4; 6{,}78)$.

c) $P(58 < x < 73) = P\left(\frac{58 - 66{,}4}{6{,}8} < z < \frac{73 - 66{,}4}{6{,}8}\right) =$

$= P(-1{,}24 < Z < 0{,}97) = P(Z < 0{,}97) - P(Z < -1{,}24) =$

$= P(Z < 0{,}97) - 1 + P(Z < 1{,}24) =$

$= 0{,}8340 - 1 + 0{,}8925 = 0{,}7265$

El 72,65% de los alumnos pesarán entre 58 y 73 kg.