Prueba final A

Nombre: **Grupo:** **Fecha / /**

1. a) Depositamos 3500 € en un banco al 4% de interés compuesto, con capitalización semestral, durante tres años. ¿Qué capital obtendremos al final del período?

b) Hemos comprado una motocicleta que costaba 3300 € y debemos pagarla en 7 años, con un interés del 5% anual, mediante pagos mensuales constantes. ¿Cuál será el importe de dichas mensualidades?

2. Calcula la solución de la ecuación, la inecuación y el sistema de ecuaciones siguientes.

a) $\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = 1$ b) $2x^2 - x - 3 \leq 0$ c) $\begin{cases} x - 2y - z = 5 \\ 2x + y + z = 1 \\ -3x - y + 2z = 4 \end{cases}$

3. a) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & \text{si } -1 \leq x \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} + b & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en toda la recta real. Representa gráficamente dicha función

b) Calcula los siguientes límites; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

4. Calcula el dominio, los puntos de discontinuidad y las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 5}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x - 3}$ c) $h(x) = \ln(3x^2 - x + \text{sen } x)$ d) $i(x) = e^{-x}(5 - x^2)$

6. La siguiente tabla muestra la talla en cm y el peso de 10 jóvenes de 14 años.

***X* (cm)**	146	150	151	155	160	160	161	161	164	164
***Y* (kg)**	44	46	47	48	50	51	52	54	54	59

a) Dibuja la nube de puntos (o diagrama de dispersión) correspondiente a esta variable bidimensional. A la vista de los resultados obtenidos, indica si existe correlación entre estas dos variables y, en caso afirmativo, di de qué tipo es.

b) Calcula la media y la desviación típica de cada una de las dos variables unidimensionales: X e Y.

c) Calcula la covarianza de la variable bidimensional (X, Y) y el coeficiente de correlación lineal.

d) Calcula la ecuación de la recta de regresión de la variable Y (peso) sobre la variable X (talla). ¿Cuánto se espera que pese un joven que mide 158 cm? ¿Y uno que mide 180 cm? ¿Cuál de las dos previsiones te parece más fiable? ¿Por qué?

7. Una epidemia de gripe afecta al 30% de la población.

a) Calcula la probabilidad de que en una familia de 6 miembros:

i) No esté enfermo ninguno.

ii) La mitad de la familia esté enferma.

b) Si en un centro de enseñanza hay matriculados 200 alumnos, calcula la probabilidad de que:

i) Haya 55 afectados de gripe.

ii) Haya más de 55 y menos de 70 enfermos de gripe.

1. a) $C_F = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{200}\right)^s$ (s es el número de semestres).

$C_F = 3500 \cdot \left(1 + \frac{4}{200}\right)^6 = 3500 \cdot (1{,}02)^6 =$

$= 3941{,}57$ €

b) $m = \dfrac{3300 \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{84} \cdot \frac{5}{1200}}{\left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{84} - 1} = 46{,}64$ €

2. a) $\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = 1 \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{x-3} + 1\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = x - 3 + 1 + 2 \cdot \sqrt{x-3} \Rightarrow \sqrt{x-3} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 3 = 1 \rightarrow x = 4$

b) $2x^2 - x - 3 \leqslant 0 \rightarrow 2(x+1) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \leqslant 0$

Construimos la tabla de signos:

	$-\infty$ a 1	1 a $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ a $+\infty$
$x + 1$	−	+	+
$x - \frac{3}{2}$	−	+	+
$2x^2 - x - 3$	+	−	+

$S: \left[1, \frac{3}{2}\right]$

c) Se aplica el método de Gauss:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 5 \\ 2x + y + z = 1 \\ -3x - y + 2z = 4 \end{cases} \xrightarrow[E_3 + 3E_1]{E_2 - 2E_1} \begin{cases} x - 2y - z = 5 \\ 5y + 3z = -9 \\ -7y - z = 19 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[5E_3 + 7E_2]{} \begin{cases} x - 2y - z = 5 \\ 5y + 3z = -9 \\ 16z = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

3. a) f es continua en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 1)$ al ser polinómica. En $(1, +\infty)$ es continua, ya que no se anula el denominador. Para que sea continua en -1 y en 1 deben coincidir los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to -1^-} (-x^2 + a \cdot x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 - a = 2 \Rightarrow a = -3$

$\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x} + b\right) \Rightarrow 2 = 1 + b \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 - 3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 + 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 1) = 1$

4. a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-2\}$, ya que -2 es el único valor que anula el denominador.

En $x = -2$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito, ya que

$\lim\limits_{x \to -2^-} (f(x)) = \frac{15}{0^-} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -2^+} (f(x)) = \frac{15}{0^+} = +\infty$

Por tanto, f tiene una asíntota vertical en $x = -2$.

La recta $y = 2x - 7$ es asíntota oblicua de f, ya que:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(2x - 7 + \frac{15}{x + 2}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} (2x - 7) + 0$

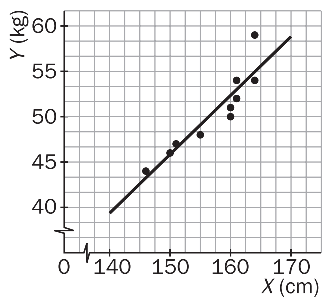
b) $D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, ya que -1 y 1 son los únicos valores que anulan el denominador. En ambos puntos hay discontinuidades inevitables de salto infinito y, por tanto, f tiene como asíntotas verticales las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

También tiene una asíntota horizontal en ambos extremos, ya que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

5. a) $f'(x) = \dfrac{4x - 3}{3\sqrt[3]{(2x^2 - 3x + 5)^2}}$ c) $h'(x) = \dfrac{9x^2 - 1 + \cos x}{3x^3 - x + \operatorname{sen} x}$

b) $g'(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 6x + 9}$ d) $i'(x) = (x^2 - 2x - 5)e^{-x}$

6. a) Hay correlación lineal positiva entre X e Y.



b) $\bar{x} = 157{,}2 \quad \sigma_x = 5{,}98$

$\bar{y} = 50{,}5 \quad \sigma_y = 4{,}25$

c) $\sigma_{xy} = 23{,}3 \quad r = 0{,}917$

d) $y = 0{,}652x - 51{,}93$

Un joven de 158 cm de estatura se espera que pese $0{,}652 \cdot 158 - 51{,}93 = 51{,}1$ kg.

Para 180 cm de estatura, el peso esperado es 65,4 kg.

Es más fiable la primera predicción, ya que 158 cm se encuentran dentro del intervalo de valores utilizado para el ajuste, muy cerca de la media de las estaturas.

7. a) El número de enfermos de gripe en una familia de 6 miembros sigue una distribución binomial $B(6;\ 0{,}3)$. Por tanto:

i) $P(X = 0) = \binom{6}{0} \cdot (0{,}3)^0 \cdot (0{,}7)^6 = 0{,}118$

ii) $P(X = 3) = \binom{6}{3} \cdot (0{,}3)^3 \cdot (0{,}7)^3 = 0{,}185$

b) En el caso del colegio estaríamos ante una $B(200;\ 0{,}3)$, y como $200 \cdot 0{,}3 = 60 > 5$ y $200 \cdot 0{,}7 = 140 > 5$, podemos sustituir dicha binomial por una normal que tenga la misma media y la misma desviación típica.

$E(x) = n \cdot p = 60 \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{42} = 6{,}48$

$B(200;\ 0{,}3) \approx N(60;\ 6{,}48)$

i) $P(X < 55) = P(X \leqslant 54{,}5) = P\left(Z \leqslant \frac{54{,}5 - 60}{6{,}48}\right) =$

$= P(Z \leqslant -0{,}85) = P(Z > 0{,}85) = 1 - P(Z < 0{,}85) =$

$= 1 - 0{,}802 = 0{,}198$

ii) $P(55 < X < 70) = P(55{,}5 < X < 69{,}5) =$

$= P\left(\frac{55{,}5 - 60}{6{,}48} < Z < \frac{69{,}5 - 60}{6{,}48}\right) =$

$= P(-0{,}69 < Z < 1{,}47) = P(Z < 1{,}47) - P(Z < -0{,}69) =$

$= P(Z < 1{,}47) + P(Z < 0{,}69) - 1 =$

$= 1 - 0{,}8023 = 0{,}755 + 0{,}929 - 1 = 0{,}684$