Prueba final B

Nombre: **Grupo:** **Fecha / /**

1. a) Se invierte en un banco la cantidad de 5000 € a un interés compuesto del 7,5% anual. Halla el número de años que han de pasar para que la inversión supere los 20000 €.

b) Una persona recibe un préstamo de 10000 € que se compromete a devolver en tres pagos iguales, que se harán al finalizar cada uno de los tres años sucesivos que siguen al préstamo, conviniendo que los intereses se calcularán al 5%. Calcula la anualidad a pagar cada año.

2. a) Descompón en factores primos el $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ y resuelve la inecuación $x^3 + 4x^2 + x - 6 > 0$.

b) Resuelve geométricamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y \leqslant 6 \\ x + y \geqslant 2 \end{array}\right\}$

3. a) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x + 2y - z = -9 \\ 3x - 2y + z = -1 \\ x - 3y - 3z = -17 \end{cases}$

b) Resuelve las siguientes ecuaciónes: $\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3 - x} = 0$

c) $\dfrac{x^2 - 1}{3} + (x - 2)^2 = \dfrac{x^2 + 2}{2}$

4. De una función empírica conocemos la siguiente tabla de valores.

x	1	4	5
$f(x)$	1	19	33

a) Calcula, por interpolación lineal, el valor que tomará dicha función para $x = 3$.

b) Calcula, utilizando la interpolación cuadrática, el valor de dicha función para $x = 6$.

5. a) El número de bacterias de un cultivo, en función del tiempo, viene dado por la expresión $f(t) = t^2 + 380t + 500$, en donde t viene expresado en minutos. Calcula:

La T.V.M., o velocidad media de crecimiento, en el perìodo [3, 5].

La T.V.I., o velocidad instantánea de crecimiento, en el instante $t = 10$.

La función velocidad de crecimiento de dicho cultivo en función del tiempo.

b) Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones.

i) $f(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot (e^x + 1)$ ii) $g(x) = (x^3 + x)^5$ iii) $h(x) = \dfrac{\text{sen}(2x + 1)}{x^2}$ iv) $i(x) = \ln\left(x - \sqrt{x}\right)$

6. Un monedero M_1 contiene 2 monedas de euro y 3 de 50 céntimos, y otro M_2 contiene 3 de euro y 5 de 50 céntimos.

Si se elige al azar un monedero y, sin mirar, se extrae una moneda de él, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda extraída sea de euro?

Sabiendo que la moneda extraída es de euro, calcula la probabilidad de que provenga del monedero M_1.

7. Un agente de seguros de vida vende pólizas a cinco personas de la misma edad y que disfrutan de buena salud. La probabilidad de que una persona en estas condiciones viva 30 años o más es de $\dfrac{2}{3}$. Determina la probabilidad de que, transcurridos 30 años, vivan:

a) Las cinco personas. b) Al menos tres personas.

8. Las notas puestas por un profesor de matemáticas a lo largo de su vida profesional se distribuyen según una normal $N(5,8;\ 1,6)$. Durante el presente curso, dicho profesor tiene 160 alumnos.

a) ¿Cuántos de ellos se espera que aprueben? (nota $\geqslant$ 5).

b) ¿Cuántos se espera que tendrán sobresaliente? (nota $\geqslant$ 8,5).

c) ¿Cuántos tendrán bien o notable? (6 $\leqslant$ nota $\leqslant$ 8,5).

Soluciones

1. a) $C_F = C_I \cdot \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^t \Rightarrow 5000(1{,}075)^t > 20\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1{,}075)^t > 4 \Rightarrow t \cdot \log(1{,}075) > \log 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow t > \dfrac{\log(4)}{\log(1{,}075)} = 19{,}17$

Deben pasar 20 años para que el capital final supere los 20 000 €.

b) $a = C \cdot \dfrac{\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^n \cdot \left(\dfrac{r}{100}\right)}{\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^n - 1} = 10\,000 \cdot \dfrac{(1{,}05)^3 \cdot (0{,}05)}{(1{,}05)^3 - 1} =$

$= \dfrac{578{,}8125}{0{,}157625} = 3672{,}09$

2. a) $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x + 3)(x + 2)(x - 1)$

Para resolver la inecuación, construimos la tabla de signos:

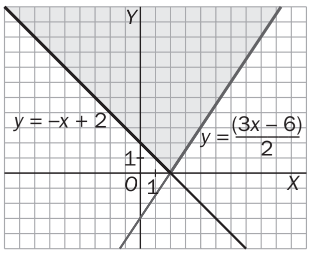
$-\infty \quad -3 \quad -2 \quad 1 \quad +\infty$

$x + 3$	−	+	+	+
$x - 2$	−	−	+	+
$x - 1$	−	−	−	+
$P(x)$	−	+	−	+

Solución: $(-3, -2) \cup (1, +\infty)$

b) $\begin{cases} 3x - 2y \leqslant 6 \\ x + y \geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geqslant \dfrac{3x - 6}{2} \\ y \geqslant -x \end{cases}$

Representando las dos rectas asociadas y teniendo en cuenta el sentido de las desigualdades se obtiene la región solución sombreada en gris oscuro en la figura.



3. a) $\begin{cases} 2x + 2y - z = -9 \\ 3x - 2y + z = -1 \\ x - 3y - 3z = -17 \end{cases} \xRightarrow{E_1 \leftrightarrow E_3} \begin{cases} x - 3y - 3z = -17 \\ 3x - 2y + z = -1 \\ 2x + 2y - z = -9 \end{cases} \Rightarrow$

$\xRightarrow[E_3 - 2E_1]{E_2 - 3E_1} \begin{cases} x - 3y - 3z = -17 \\ 7y + 10z = 50 \\ 8x + 5z = 25 \end{cases} \xRightarrow{7E_3 - 8E_2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 3y - 3z = -17 \\ 7y + 10z = 50 \\ -45z = -225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 5 \end{cases}$

b) $\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3 - x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{3 - x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 3 = 3 - x \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

c) $\dfrac{x^2 - 1}{3} + (x - 2)^2 = \dfrac{x^2 + 2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x^2 - 1) + 6(x - 2)^2 = 3(x^2 + 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2 - 24x + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

4. a) Calculamos la ecuación de la recta, $y = m \cdot x + n$, que pasa por los puntos (1, 1) y (4, 19).

$\begin{cases} 1 = m + n \\ 19 = 4m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = -5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 6x - 5;\ y(3) = 6 \cdot 3 - 5 = 13$

b) Calculamos la parábola, $f(x) = ax^2 + bx + c$, que pasa por los puntos (1, 1), (4, 19) y (5, 33).

$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 19 \\ 25a + 5b + c = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x + 3;\ f(6) = 51$

5. a) i) $\text{T.V.M.}[3, 5] = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \dfrac{2425 - 1649}{2} =$

$= 388$ bacterias/m.

ii) $\text{T.V.I.}(10) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(10 + h) - f(10)}{h} = \dfrac{h^2 + 400h}{h} =$

$= 400$ bac/m.

iii) $v(t) = f'(t) = 2t + 380$

b) i) $f'(x) = (2x - 2)(e^x + 1) + (x^2 - 2x + 3)e^x$

ii) $g'(x) = 5(x^3 + x)^4(3x^2 + 1)$

iii) $h'(x) = \dfrac{2x\cos(2x + 1) - 2\,\text{sen}(2x + 1)}{x^3}$

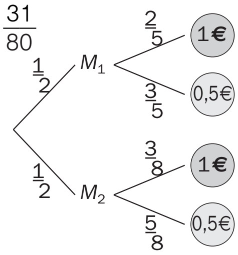
iv) $i'(x) = \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{2x\left(\sqrt{x} - 1\right)}$

6. $P(1\text{ €}) = P(M_1)P(1\text{ €}/M_1) + P(M_2)P(1\text{ €}/M_2) =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{6} = \dfrac{31}{80}$

$P(M_1/1\text{ €}) = \dfrac{P(M_1)P(1\text{ €}/M_1)}{P(1\text{ €})} =$

$= \dfrac{\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5}}{\dfrac{31}{80}} = \dfrac{16}{31}$



7. Se trata de una binomial $B\left(5, \dfrac{2}{3}\right)$.

a) $P(X = 5) = \dbinom{5}{5} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 = 0{,}132$

b) $P(X \geqslant 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$

$= \dbinom{5}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \dbinom{5}{4} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^1 + 0{,}132 =$

$= 10 \cdot \dfrac{8}{27} \cdot \dfrac{1}{9} + 5 \cdot \dfrac{16}{81} \cdot \dfrac{1}{3} + 0{,}132 = 0{,}79$

8. Al ser una normal $N(5{,}8;\ 1{,}6)$:

a) $P(5 < X) = P\left(\dfrac{5 - 5{,}8}{1{,}6} < Z\right) = P(-0{,}5 < Z) =$

$= P(Z < 0{,}5) = 0{,}69;\ \dfrac{69}{100} \cdot 160 = 110$ alumnos

b) $P(8{,}5 < X) = P\left(\dfrac{8{,}5 - 5{,}8}{1{,}6} < Z\right) = P(1{,}69 < Z) =$

$= 1 - P(Z < 1{,}69) = 0{,}46;\ \dfrac{46}{100} \cdot 160 = 7$ alumnos

c) $P(6 < X < 8{,}5) = P(0{,}125 < Z < 1{,}69) =$

$= P(Z < 1{,}69) - P(Z < 0{,}125) = 0{,}954 - 0{,}550 =$

$= 0{,}404;\ \dfrac{40{,}4}{100} \cdot 160 = 65$ alumnos