Bloque II Actividades de síntesis: Geometría

OPCIÓN A

A1. Demuestra la igualdad trigonométrica $(\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 2y)^2 + (\cos 2x + \cos 2y)^2 = 4\cos^2(x + y)$ y aplícala para calcular de forma exacta $\cos 37° 30'$.

$(\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 2y)^2 + (\cos 2x + \cos 2y)^2 = (2\cos(x + y)\operatorname{sen}(x - y))^2 + (2\cos(x + y)\cos(x - y))^2 =$

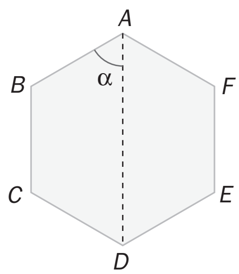
$= 4\cos^2(x + y)\operatorname{sen}^2(x - y) + 4\cos^2(x + y)\cos^2(x - y) = 4\cos^2(x + y)(\operatorname{sen}^2(x - y) + \cos^2(x - y)) = 4\cos^2(x + y)$

$4\cos^2 37° 30' = 4\cos^2(15° + 22° 15') = (\operatorname{sen} 30° - \operatorname{sen} 45°)^2 + (\cos 30° + \cos 45°)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1 + 2 - 2\sqrt{2}}{4} + \frac{3 + 2 + 2\sqrt{6}}{4} = \frac{8 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{4} = \frac{4 - \sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}.$

Por tanto: $\cos 37° 30' = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{2} + \sqrt{6}}{8}}$

A2. Ciertos insectos construyen celdas de cera con forma de hexágono de lados todos iguales a 1 cm, pero de ángulos no necesariamente iguales, tal y como muestra la figura.



a) Calcula la distancia AD si el ángulo α es de 50°.

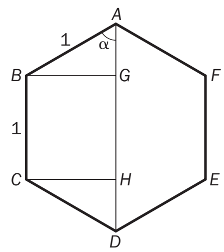
b) Demuestra que el área encerrada por el hexágono es $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha$.

c) Calcula el área del hexágono si el ángulo α es de 50°.

a) $AD = AG + GH + HD = 1 \cdot \cos\alpha + 1 + 1 \cdot \cos\alpha = 1 + 2\cos\alpha = 1 + 2\cos 50° = 2{,}29$ cm

b) Superficie del trapecio $ABCD$:

$S_t = \frac{(AD + CB) \cdot GB}{2} = \frac{(1 + 2\cos\alpha) \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{2}$



c) Superficie del hexágono: $S_e = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha$

$S_e = \operatorname{sen} 50° + \operatorname{sen} 100° = 1{,}75 \text{ cm}^2$

A3. Dados los puntos $A(-1\ \ -2)$ y $B(5\ \ 1)$

a) Calcula dos puntos P y Q tales que dividan al segmento $\overline{AB}$ en tres partes iguales, y halla el punto medio M de $\overline{PQ}$.

b) Si T es el punto de coordenadas $(2\ \ 3)$, compara los vectores $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{TQ} + \overrightarrow{TB}$ con $\overrightarrow{TM}$.

c) Si T es un punto cualquiera del plano, demuestra que $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{TQ} + \overrightarrow{TB} = 4\overrightarrow{TM}$.

$\overrightarrow{AB} = (6\ \ 3) \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (2\ \ 1)$

a) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (2, 1) \Rightarrow P = (-1, -2) + (2, 1) = (1, -1)$

$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (2, 1) \Rightarrow Q = (1, -1) + (2, 1) = (3, 0)$

$M = \left(\frac{1 + 3}{2}, \frac{-1 + 0}{2}\right) = \left(2, \frac{-1}{2}\right)$, que también es el punto medio de AB.

b) $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{TQ} + \overrightarrow{TB} = (-3, -5) + (-1, -4) + (1, -3) + (3, -2) = (0, -14)$

$M\left(2, \frac{-1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{TM} = \left(0, \frac{-7}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{TQ} + \overrightarrow{TB} = 4\overrightarrow{TM}$

Los vectores tienen la misma dirección y el mismo sentido, y el módulo del primero es cuatro veces el del segundo.

c) Aplicando el apartado a sucesivas veces: $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{TQ} + \overrightarrow{TB} = (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TQ}) + (\overrightarrow{TP} + \overrightarrow{TB}) = 2\overrightarrow{TP} + 2\overrightarrow{TQ} = 2(\overrightarrow{TP} + \overrightarrow{TQ}) = 2 \cdot 2\overrightarrow{TM} = 4\overrightarrow{TM}$

A4. En una base ortonormal, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen las siguientes coordenadas: $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{v} = (-1, 5)$. Calcula:

a) Su producto escalar.

b) El módulo de cada vector.

c) El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) El valor de m para que el vector $\vec{w} = (4, m)$ sea ortogonal al vector $\vec{u}$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -3)\ (-1, 5) = 2\ (-1) + (-3) \cdot 5 = -2 - 15 = -17$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13};\quad |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

c) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|} = \dfrac{-17}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \dfrac{-17}{\sqrt{338}} > -0{,}9247;\ (\vec{u}, \vec{v}) = \arccos(-0{,}9247) = 157°\ 37'\ 11{,}514''$

d) $\vec{u} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow (2, -3) \cdot (4, m) = 0 \Leftrightarrow 8 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{8}{3}$

A5. Dos lados de un rectángulo $ABCD$ están sobre las rectas r: $x + 2y - 3 = 0$ y s: $x + 2y + 4 = 0$, y dos de sus vértices son $A(1, 1)$ y $B(3, 0)$. Calcula las coordenadas de los otros dos vértices.

$r \| s$. Como $A \in r$, el otro lado al que pertenece A estará en la recta perpendicular a r por el punto A.

$2x - y + c = 0 \Rightarrow 2 - 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow t : 2x - y - 1 = 0$. Otro vértice será el punto $s \cap t = \left(\dfrac{-2}{5}, \dfrac{-9}{5}\right)$.

Como $B \in r$, podemos determinar la recta del lado restante.

$2x - y + c = 0 \Rightarrow 6 + c = 0 \Rightarrow c = -6 \Rightarrow t' : 2x - y - 6 = 0$

El último vértice será el punto $s \cap t' = \left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{-14}{5}\right)$.

A6. Dados los puntos $A(6, 0)$ y $C(7, 5)$:

a) Calcula la mediatriz del segmento $\overline{AC}$.

b) Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene como uno de sus diámetros el segmento $\overline{AC}$.

c) $ABCD$ es un cuadrado. Calcula las coordenadas de B y D.

a) Mediatriz de $AC = \dfrac{x - \frac{13}{2}}{5} = \dfrac{y - \frac{5}{2}}{-1} \Rightarrow x + 5y = 19$

b) Circunferencia de centro el punto medio de AC, $M\left(\dfrac{13}{2}\ \dfrac{5}{2}\right)$ y radio la mitad de la distancia entre A y C

$r = \dfrac{\sqrt{1 + 25}}{2} = \dfrac{\sqrt{26}}{2}\ \left(x - \dfrac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{1^2 + 5^2}}{2}\right)^2 = \dfrac{13}{2}$

c) Los vértices B y D serán las intersecciones de la mediatriz y la circunferencia anteriores.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 13x - 5y + 42 = 0 \\ x + 5y = 19 \end{cases} \Rightarrow B(4, 3);\ D(9, 2)$$

A7. Calcula los siguientes cocientes: a) $\dfrac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{2} + i}$ b) $\dfrac{(3 - i)^2}{i(1 + i)}$

a) $\dfrac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{2} + i} = \dfrac{(\sqrt{2} - i)^2}{(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i)} = \dfrac{2 - 1 - 2\sqrt{2}i}{2 + 1} = \dfrac{1 - 2\sqrt{2}i}{3}$

b) $\dfrac{(3 - i)^2}{i(1 + i)} = \dfrac{9 - 1 - 6i}{i - 1} = \dfrac{(8 - 6i)(i + 1)}{(i - 1)(i + 1)} = \dfrac{14 + 2i}{-2} = -7 - i$

OPCIÓN B

B1. Resuelve en [0 2π] la ecuación $1 + \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \sqrt{2}$.

$$1 + \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\cos x + \cos 3x}{\cos x} = \frac{2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}}{\cos x} = \frac{2\cos 2x \cdot \cos(-x)}{\cos x} = \frac{2\cos 2x \cdot \cos x}{\cos x} = 2\cos 2x$$

B2. En un paralelogramo *ABCD*, los lados *AB* y *AD* miden, respectivamente, 6 y 8 cm, y el ángulo que forman es de 30°. Halla sus diagonales.

Al ser *ABCD* un paralelogramo, los lados *CD* y *BC* también medirán 6 y 8 cm, respectivamente. Los lados *AD* y *CD* forman un ángulo de 150°.

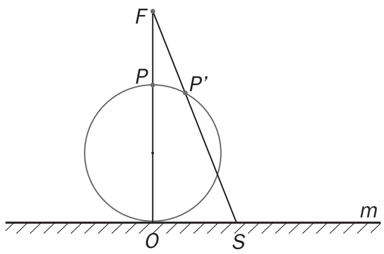
La diagonal *BD* es el tercer lado del triángulo *ABD*, que se puede hallar mediante el teorema del coseno.

$d^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 30° = 100 - 48\sqrt{3} \Rightarrow d = \sqrt{100 - 48\sqrt{3}}$ cm

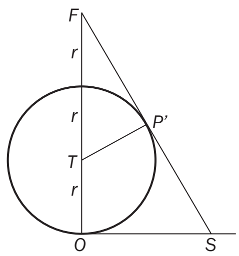
La diagonal *AC* es el tercer lado del triángulo *ACD*, que se puede hallar mediante el teorema del coseno.

$d^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 150° = 100 - 48\sqrt{3} \Rightarrow d = \sqrt{100 + 48\sqrt{3}}$ cm

B3. Un punto, que inicialmente se encuentra en *P*, se mueve sobre la circunferencia que aparece en la figura a razón de dos grados cada segundo y en el sentido de las agujas del reloj. El radio de la circunferencia es de 2 cm. En el punto *F*, situado a 4 cm del centro de la circunferencia, hay un foco luminoso que proyecta la sombra *S* del punto *P'* sobre el muro determinado por la recta *m*. Calcula la distancia máxima entre *S* y *O* y el primer instante en el que se alcanza.



En el momento que más se separa *S* de *O*, la recta *FP'* es tangente a la circunferencia y, por tanto, el triángulo determinado por el centro de la circunferencia *T* por *F* y por *P'* es rectángulo en *P'*.



Por tanto, sen $TFP' = \dfrac{r}{2r} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow OFP' = 30°$

$OS = 3r \cdot \text{tg}\, 30° = 6\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ cm

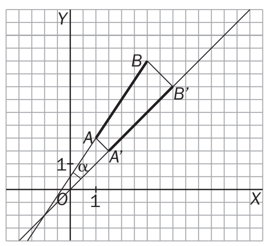
$FTP' = 60° \Rightarrow$ La máxima distancia se alcanza a los 30 s.

B4. El segmento de extremos *A*(1 2) y *B*(3 5) se proyecta ortogonalmente sobre la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero. Calcula la longitud del segmento proyectado y el ángulo formado por los dos segmentos.

Recta AA': $x + y = k \Rightarrow 1 + 2 = 3 = k \Rightarrow x + y = 3$. $A' \begin{cases} x + y = 3 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow A'\left(\dfrac{3}{2}\ \ \dfrac{3}{2}\right)$

Recta BB': $x + y = k \Rightarrow 3 + 5 = 8 = k \Rightarrow x + y = 8$. $B' \begin{cases} x + y = 8 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = y = 4 \Rightarrow B'\ (4\ \ 4)$

$d(A'\ B') = \sqrt{\left(4 - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(4 - \dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\ u.$



$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2\ \ 3) \\ \overrightarrow{A'B'} = \left(\dfrac{5}{2}\ \ \dfrac{5}{2}\right) \text{ paralelo a } (1\ \ 1) \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2 + 3}{\sqrt{4 + 9}\sqrt{2}} = 0{,}9806 \Rightarrow \alpha = 11°\ 19'$

B5. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas:

$r : x + 2y - 1 = 0$ y $s : 2x - y + 2 = 0$. Comprueba que las rectas son perpendiculares.

Sea un punto del plano $P(x, y)$ equidistante de ambas rectas.

$$d(P, r) = d(P, s) \Rightarrow \frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x - y + 2|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 2x - y + 2 \Rightarrow x - 3y + 3 = 0 \\ x + 2y - 1 = 2x + y - 2 \Rightarrow 3x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por las bisectrices de las dos rectas.

Las rectas son perpendiculares, ya que el producto escalar de sus vectores directores es 0. $(2, -1) \cdot (1, 2) = 2 - 2 = 0$.

B6. Dada la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$:

a) Indica el valor de sus semiejes y de su semidistancia focal; las coordenadas del centro, focos y vértices; las ecuaciones de las asíntotas y el valor de la excentricidad.

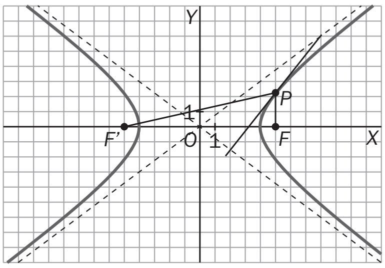
b) Dibújala.

c) Comprueba que el punto $P\left(5\ \frac{9}{4}\right)$ pertenece a la cónica y calcula las ecuaciones de sus radios vectores.

d) Calcula la bisectriz, con pendiente positiva, de los dos radios vectores anteriores y resuelve el sistema formado por esta bisectriz y la cónica. Interpreta los resultados.

a) $9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ $a = 4$ $b = 3$ $c = \sqrt{16 + 9} = 5$ Centro: $(0\ \ 0)$ Vértices: $(4\ \ 0)$ $(-4\ \ 0)$

Focos: $(-5\ \ 0)$ $(5\ \ 0)$ Asíntotas: $1 = \pm \frac{3}{4}x$ Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$

b) 

c) $\frac{5^2}{16} - \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2}{9} = \frac{25}{16} - \frac{81}{16 \cdot 9} = \frac{25 - 9}{16} = 1$ $\overline{FP} = \frac{x - 5}{0} = \frac{y}{\frac{9}{4}} \Rightarrow x = 5$

$F'P = \frac{x + 5}{10} = \frac{y}{\frac{9}{4}} \Rightarrow F'P = 9x - 40y + 45 = 0$

d) La bisectriz de $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$ con pendiente positiva es:

$$x - 5 = -\frac{9x - 40y + 45}{\sqrt{9^2 + 40^2}} \Rightarrow 41x - 205 = -9x + 40y - 45 \Rightarrow t = 5x - 4y - 16 = 0$$

$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 = 144 \\ 5x - 4y - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ La única solución es el punto P. La bisectriz hallada es la tangente a la hipérbola en P.

B7. Calcula el cociente $\frac{2(i^4 - i^3)}{1 - i}$ y sus raíces cuartas.

$$\frac{2(i^4 - i^3)}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{1 - i} = \frac{2(1 + 1)^2}{2} = 2i = 2_{90°}$$

$$\sqrt[4]{2_{90°}} = \sqrt[4]{2}_{\frac{90° + 360°k}{4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{2}_{\frac{90°}{4}} = \sqrt[4]{2}_{22°30'} \\ \sqrt[4]{2}_{\frac{90° + 360°}{4}} = \sqrt[4]{2}_{112°30'} \\ \sqrt[4]{2}_{\frac{90° + 360° \cdot 2}{4}} = \sqrt[4]{2}_{202°30'} \\ \sqrt[4]{2}_{\frac{90° + 360° \cdot 3}{4}} = \sqrt[4]{2}_{292°30'} \end{cases}$$