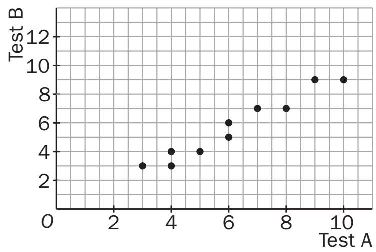
Bloque IV Estadística y probabilidad

OPCIÓN A

A.1. A un grupo de 10 alumnos se les han aplicado dos tests de inteligencia, el *A* y el *B*, cuyos resultados vienen expresados en la siguiente tabla:

Resultados del test *A* (x_i)	3	4	4	5	6	6	7	8	9	10
Resultados del test *B* (y_i)	3	3	4	4	6	5	7	7	9	9

a) Representa la nube de puntos.
b) Halla el coeficiente de correlación e interpreta su valor.
c) Halla la recta de regresión de *Y* sobre *X*.
d) Halla la nota que se espera en el test *B* para un alumno que obtuvo un 6 en el test *A*.
e) Halla la recta de regresión de *X* sobre *Y*.
f) Calcula la nota que se espera en el test *A* para un alumno que obtuvo un 10 en el test *B*.



a) Nube de puntos de la derecha.

b) $\bar{x} = 6{,}2;\ s_x^2 = 4{,}76 \Rightarrow s_x = \sqrt{4{,}76} = 2{,}1817$

$\bar{y} = 5{,}7;\ s_y^2 = 4{,}61 \Rightarrow s_y = \sqrt{4{,}61} = 2{,}1471$

$s_{xy} = 4{,}56 \qquad r = \dfrac{s_{xy}}{s_x\, s_y} = \dfrac{4{,}56}{2{,}1817 \cdot 2{,}1471} = 0{,}973$

Como *r* es positivo, la correlación es directa, es decir, a más nota en el test *A* le corresponde más nota en el test *B*. Como *r* es muy próximo a la unidad, hay correlación directa fuerte y tiene sentido hallar las rectas de regresión.

c) $y - \bar{y} = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x}) \Rightarrow y - 5{,}7 = \dfrac{4{,}56}{4{,}76}(x - 6{,}2) \Rightarrow y = 0{,}9580x - 0{,}2396$

d) Sustituyendo $x = 6$ en la ecuación anterior se obtiene: $y = 0{,}9580 \cdot 6 - 0{,}2396 = 5{,}5084$.
Por tanto, se espera que el alumno obtenga un 6 en el test *B*.

e) $x - \bar{x} = \dfrac{s_{xy}}{s_y^2}(y - \bar{y}) \Rightarrow x - 6{,}2 = \dfrac{4{,}56}{4{,}61}(y - 5{,}7) \Rightarrow x = 0{,}9892y + 0{,}5616$

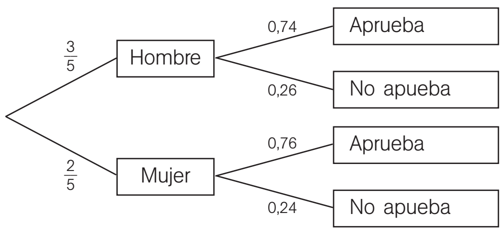
f) Sustituyendo $y = 10$ en la ecuación anterior se obtiene: $x = 0{,}9892 \cdot 10 + 0{,}5616 > 10$.
Por tanto, se espera que el alumno obtenga un 10 en el test *A*.

A.2. ¿Cuántos tetraedros determinan ocho puntos del espacio de forma que cuatro cualesquiera de ellos no sean coplanarios?

Como el tetraedro tiene cuatro vértices, se tiene: $C_{8,\,4} = \dfrac{8!}{4!\ 4!} = 70$. Se pueden determinar 70 tetraedros diferentes.

A.3. En una oposición, la proporción de hombres que se presentan es $\dfrac{3}{2}$ de la de mujeres. Se sabe que la probabilidad de que apruebe un hombre es de 0,74, y la de que apruebe una mujer, de 0,76. Elegido al azar un opositor aprobado:

a) Halla la probabilidad de que sea una mujer.
b) Halla la probabilidad de que sea un hombre.



Formamos el diagrama de árbol.

a) $P(\text{mujer / aprueba}) = \dfrac{\frac{2}{5} \cdot 0{,}76}{\frac{3}{5} \cdot 0{,}74 + \frac{2}{5} \cdot 0{,}76} = 0{,}4064$

b) $P(\text{hombre / aprueba}) = \dfrac{\frac{3}{5} \cdot 0{,}74}{\frac{3}{5} \cdot 0{,}74 + \frac{2}{5} \cdot 0{,}76} = 0{,}5936$

A.4. Sea la siguiente función $f(x)$ definida a trozos del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 2 \\ -x + \dfrac{5}{2}, & 2 < x \leqslant \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

a) Representa gráficamente $f(x)$.

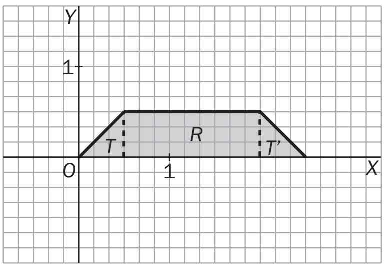
b) Comprueba si es una función de densidad.

c) Halla la media aritmética de X.

d) Halla la varianza de X y la desviación típica.

e) Calcula las siguientes probabilidades: $P(X \leqslant 1)$, $P\left(\dfrac{1}{2} \leqslant X \leqslant \dfrac{3}{2}\right)$, $P(X \leqslant 3)$, $P(X > 3)$, $P(X \geqslant 1{,}5)$.

a)



b) Como la $f(x)$ es siempre positiva, queda ver que encierra un recinto de área unidad.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Área } (T) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} \\ \text{Área } (R) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4} \\ \text{Área } (T') = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} \end{array}\right\} \quad \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{8} = 1.$$ Se trata de una función de densidad.

c) $$\mu = E[X] = \int_0^{\frac{5}{2}} x f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} x \cdot \frac{1}{2}\,dx + \int_2^{\frac{5}{2}} x\left(-x + \frac{5}{2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} + \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{4}\right]_2^{\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{21}{32} + \frac{241}{192} = \frac{125}{64} \approx 1{,}9531$$

d) $$\sigma^2 = V[X] = \int_0^{\frac{5}{2}} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cdot x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} x^2 \cdot \frac{1}{2}\,dx + \int_2^{\frac{5}{2}} x^2\left(-x + \frac{5}{2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^3}{6}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} + \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{5x^3}{6}\right]_2^{\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{1}{64} + \frac{21}{16} + \frac{113}{192} = \frac{23}{12} \approx 1{,}9167$$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{1{,}9167} \approx 1{,}3844$

e) $P(X \leqslant 1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{8}$

$P\left(\dfrac{1}{2} < X < \dfrac{3}{2}\right) = 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$P(X \leqslant 3) = P(E) = 1$

$P(X > 3) = P(\varnothing) = 0$

$P(X \geqslant 1{,}5) = \dfrac{3}{8}$

A.5. En un estudio realizado en una comunidad autónoma se ha visto que las edades de los profesionales médicos se distribuyen normalmente con media de 41 años y una desviación típica de 4,8 años.

Elegido un médico al azar se desea saber las siguientes probabilidades:

a) Que tenga más de 45 años.

b) Que tenga menos de 32 años.

c) Que tenga una edad comprendida entre 42 y 50 años.

d) En un hospital en el que trabajan 60 médicos, ¿cuántos tendrán edades entre 42 y 50 años?

Sea X la variable aleatoria continua que expresa la edad de los profesionales médicos de esa comunidad autónoma, X sigue una distribución $N(41;\ 4{,}8)$.

a) $P(X > 45) = 1 - P(X \leqslant 45) = 1 - P\left(Z \leqslant \dfrac{45 - 41}{4{,}8}\right) = 1 - P(Z \leqslant 0{,}83) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$

b) $P(X \leqslant 32) = P\left(Z \leqslant \dfrac{32 - 41}{4{,}8}\right) = P(Z \leqslant -1{,}87) = 1 - P(Z \leqslant 1{,}87) = 1 - 0{,}9693 = 0{,}0307$

c) $P(42 < X \leqslant 50) = P\left(\dfrac{42 - 41}{4{,}8} < Z \leqslant \dfrac{50 - 41}{4{,}8}\right) = P(0{,}21 < Z \leqslant 1{,}87) = P(Z \leqslant 1{,}87) - P(Z \leqslant 0{,}21) =$
$= 0{,}9693 - 0{,}5832 = 0{,}3861$

d) $60 \cdot 0{,}3861 = 23{,}16$. Por tanto, se espera que en el hospital haya 23 médicos con edades comprendidas entre 42 y 50 años.

A.6. Por encuestas realizadas se sabe que la intención de voto al partido mayoritario en las elecciones locales es del 62%. Elegida una muestra al azar formada por 10 personas, se desea saber la probabilidad de que voten a dicho partido:

a) Exactamente 6 personas.

b) Más de 6 personas.

c) Más de 2 personas y menos de 5.

d) Si en la ciudad se espera que ejerzan el derecho a voto 865 000 personas, ¿cuántas de ellas se espera que voten a dicho partido?

Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0{,}62$; es decir, $B(10;\ 0{,}62)$.

Sea X la variable aleatoria discreta que expresa el número de votantes a dicho partido de entre los 10 elegidos para la muestra.

a) $P(X = 6) = \binom{10}{6} 0{,}62^6 \cdot 0{,}38^4 = 0{,}2487$

b) $P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{7} 0{,}62^7 \cdot 0{,}38^3 + \binom{10}{8} 0{,}62^8 \cdot 0{,}38^2 +$
$+ \binom{10}{9} 0{,}62^9 \cdot 0{,}38 + \binom{10}{10} 0{,}62^{10} = 0{,}2319 + 0{,}1419 + 0{,}0514 + 0{,}0084 = 0{,}4336$

c) $P(2 < X < 5) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{10}{3} 0{,}62^3 \cdot 0{,}387 + \binom{10}{4} 0{,}62^4 \cdot 0{,}386 = 0{,}0327 + 0{,}0934 = 0{,}1261$

d) $865\,000 \cdot 0{,}62 = 563\,300$ personas

Es decir, se espera que si ejercen su derecho al voto 865 000 personas, voten al citado partido 536 300.

OPCIÓN B

B.1. La siguiente tabla proporciona los alargamientos de un muelle dependiendo de la pesa que cuelga de él.

X: masa (g)	0	25	50	75	100	125	150
Y: alargamiento (cm)	0	0,8	1,6	2,3	3,1	3,7	4,5

a) Calcula el coeficiente de correlación e interprétalo.

b) Calcula y dibuja la recta de regresión de Y sobre X.

c) Estima el alargamiento que se puede esperar si colgamos una masa de 90 g.

a) $\bar{x} = 75$; $s_x^2 = 2500 \Rightarrow s_x = \sqrt{2500} = 50$

$\bar{y} = \dfrac{16}{7}$; $s_y^2 = 2,2098 \Rightarrow s_y = 1,4865$

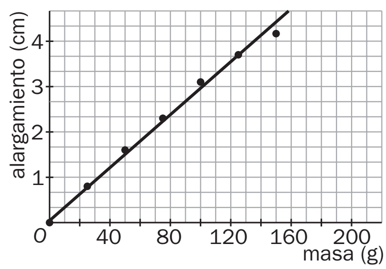
$s_{xy} = 74,2857 \quad r = \dfrac{s_{xy}}{s_x\, s_y} = 0,9994$

Como r es positivo, la correlación es directa, es decir, a más masa le corresponde más alargamiento. Como r es muy próximo a la unidad, hay correlación directa fuerte y tiene sentido hallar las rectas de regresión.

b) $y - \bar{y} = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x})$

$y - \dfrac{16}{7} = \dfrac{74,2857}{2500}(x - 75)$

$y = 0,0297x - 0,0582$



c) $y = 0,0297 \cdot 90 - 0,0582 = 2,6148$ cm

B.2. El Ayuntamiento de una ciudad decide imponer la obligatoriedad de que las motocicletas lleven una matrícula de forma que puedan ser identificadas. La matrícula estará compuesta por dos vocales diferentes y tres cifras iguales o no, pero que no comiencen por 0. ¿Cuántas matrículas diferentes se podrán formar?

Hay 900 números de tres cifras, del 100 al 999. El número total será $V_{5,2} \cdot 900 = 18\,000$ matrículas.

B.3. Se tienen dos urnas: en la urna A hay 25 bolas rojas y 7 verdes, y en la urna B, 12 bolas rojas y 9 verdes. Se sortea con una moneda la urna de la que se van a extraer dos bolas sin reemplazamiento. Calcula las probabilidades de que:

a) Las dos bolas sean rojas.

b) Las dos bolas sean verdes.

c) Una sea roja y la otra verde.

d) Sabiendo que las dos bolas son verdes, halla la probabilidad de que procedan de la urna B.

Los tres primeros apartados son aplicaciones del teorema de la probabilidad total.

a) $P(\text{dos rojas}) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{25}{32} \cdot \dfrac{24}{31} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{12}{21} \cdot \dfrac{11}{20} \approx 0,4596$

b) $P(\text{dos verdes}) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{7}{32} \cdot \dfrac{6}{31} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{21} \cdot \dfrac{8}{20} \approx 0,1069$

c) $P(\text{una roja y una verde}) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{25}{32} \cdot \dfrac{7}{31} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{7}{32} \cdot \dfrac{25}{31} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{12}{21} \cdot \dfrac{9}{20} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{21} \cdot \dfrac{12}{20} \approx 0,3060$

d) Es una aplicación del teorema de Bayes.

$$P(\text{procedan de la urna } B \,/\, \text{las dos sean verdes}) = \frac{P(\text{urna } B \text{ y las dos verdes})}{P(\text{las dos verdes})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{8}{20}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{32} \cdot \frac{6}{31} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{8}{20}} \approx 0,4335$$

B.4. Una variable aleatoria X tiene por función de probabilidad la dada por la siguiente tabla:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{30}$	m	$\frac{5}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$

a) Calcula m para que sea una verdadera función de probabilidad.

b) Halla las siguientes probabilidades:
$P(X \leqslant 2)$; $P(X < 3)$; $P(2{,}3 < X \leqslant 6)$; $P(X \geqslant 8)$; $P(X \leqslant 8)$; $P(1{,}2 \leqslant X \leqslant 1{,}9)$.

c) Halla la esperanza matemática, la varianza y la desviación típica de X.

a) Para que sea una verdadera función de probabilidad, $\frac{3}{30} + m + \frac{5}{30} + \frac{6}{30} + \frac{4}{30} + \frac{5}{30} = 1 \Rightarrow m = \frac{7}{30}$

b) $P(X \leqslant 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{3}{30} + \frac{7}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ $\quad P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{3}$

$P(2{,}3 < X \leqslant 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{5}{30} + \frac{6}{30} + \frac{4}{30} + \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$P(X \geqslant 8) = P(\varnothing) = 0$ $\quad P(X \leqslant 8) = P(E) = 1$ $\quad P(1{,}2 \leqslant X \leqslant 1{,}9) = P(\varnothing) = 0$

c) $\mu = E[X] = 1 \cdot \frac{3}{30} + 2 \cdot \frac{7}{30} + 3 \cdot \frac{5}{30} + 4 \cdot \frac{6}{30} + 5 \cdot \frac{4}{30} + 6 \cdot \frac{5}{30} = \frac{106}{30} = 3{,}5\widehat{3}$

$\sigma^2 = V[X] = 1^2 \cdot \frac{3}{30} + 2^2 \cdot \frac{7}{30} + 3^2 \cdot \frac{5}{30} + 4^2 \cdot \frac{6}{30} + 5^2 \cdot \frac{4}{30} + 6^2 \cdot \frac{5}{30} - 3{,}5333^2 \approx 2{,}5825$

$\sigma = \sqrt{2{,}5825} \approx 1{,}607$.

B.5. Un Ayuntamiento ha construido 120 apartamentos para jóvenes en régimen de alquiler, que se van a cubrir mediante un sorteo público. El número de peticionarios de estas viviendas es de 3125 jóvenes. De un grupo de 10 amigos que han solicitado la vivienda se desea saber las siguientes probabilidades:

a) Que hayan obtenido la vivienda 5 jóvenes.

b) Que hayan obtenido la vivienda menos de 2 jóvenes del grupo.

c) Que hayan obtenido la vivienda los 10 amigos.

d) Que no haya obtenido la vivienda ninguno de los 10 amigos.

e) En un grupo de 50 jóvenes, ¿cuántos se espera que consigan la vivienda?

Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 10$, $p = \frac{120}{3125} = 0{,}0384$. Por tanto, $B(10;\ 0{,}0384)$.

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de alumnos del grupo de 10 amigos que consiguen mediante el sorteo la vivienda.

a) $P(X=5) = \binom{10}{5} 0{,}0384^5 \cdot 0{,}9616^5 = 0{,}0000172$

b) $P(X \leqslant 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \binom{10}{0} 0{,}0384^0 \cdot 0{,}9616^{10} + \binom{10}{1} 0{,}0384^1 \cdot 0{,}9616^9 +$

$+ \binom{10}{2} 0{,}0384^2 \cdot 0{,}9616^8 = 0{,}6760 + 0{,}2695 + 0{,}0485 = 0{,}9940$

c) $P(X = 10) = \binom{10}{10} 0{,}0384^{10} = 0$

d) $P(X = 0) = \binom{10}{0} 0{,}0384^0 \cdot 0{,}9616^{10} = 0{,}6760$

e) Como la probabilidad de obtener una vivienda es $p = 0{,}0384$, en un grupo de 50 jóvenes se espera que consigan la vivienda $50 \cdot 0{,}0384 = 1{,}92$, aproximadamente 2 jóvenes.

B.6. Un test consta de 200 preguntas, cada una de las cuales tiene 5 respuestas de las que solo una es la correcta. Elegido un alumno al azar, halla la probabilidad de que conteste correctamente a 50 preguntas si lo hace al azar.

Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 200$, $p = \frac{1}{5}$, es decir, $B\left(200; \frac{1}{5}\right)$.

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de preguntas contestadas correctamente.

Como $n \cdot p = 200\,\frac{1}{5} \geqslant 5$ y $n(1-p) = 200\frac{4}{5} \geqslant 5$, podemos aproximar mediante el teorema de Moivre por una normal de parámetros $\mu = n \cdot p = 200\frac{1}{5} = 40$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{200 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = 5{,}66$.

Por tanto, $X' \in N(40; 5{,}66)$

$$P(X=50)=P(49{,}5<X'\leqslant 50{,}5)=P\left(\frac{49{,}5-40}{5{,}66}<Z\leqslant\frac{50{,}5-40}{5{,}66}\right)=P(1{,}68<Z\leqslant 1{,}85)=P(Z\leqslant 1{,}85)-P(Z\leqslant 1{,}68)=$$
$$=0{,}9678-0{,}9535=0{,}0143$$

B.7. Se han medido las alturas que han alcanzado 145 plantas de una determinada variedad a los 3 meses de haber sido plantadas y se ha obtenido la siguiente tabla:

Tallas (cm)	(10-15]	(15-20]	(20-25]	(25-30]	(30-35]	(35-40]	(40-45]	(45-50]
N.º de plantas	2	3	21	44	45	19	7	1

Ajusta esta distribución mediante una normal y calcula el número de plantas esperadas con arreglo a la distribución ajustada en cada uno de los intervalos.

Como el histograma de frecuencias es de tipo campaniforme, vamos a tratar de aproximar mediante una distribución normal de parámetros $\bar{x}$ y s.

Calculemos con ayuda de una calculadora científica $\bar{x}$ y s $\quad \bar{x} = 30{,}14$ cm $\quad s = 6{,}1$ cm

Por tanto, aproximaremos mediante la distribución $N(30{,}14; 6{,}1)$.

Sea X la variable que expresa la altura, en cm, de las plantas:

$$P(10<X\leqslant 15)=P\left(\frac{10-30{,}14}{6{,}1}<Z\leqslant\frac{15-30{,}14}{6{,}1}\right)=P(-3{,}3<Z\leqslant -2{,}48)=P(Z\leqslant 3{,}3)-P(Z\leqslant 2{,}48)=0{,}0061$$

$P(15 < X \leqslant 20) = P(-2{,}48 < Z \leqslant -1{,}66) = 0{,}0417$

$P(20 < X \leqslant 25) = P(-1{,}66 < Z \leqslant -0{,}84) = 0{,}1515$

$P(25 < X \leqslant 30) = P(-0{,}84 < Z \leqslant -0{,}02) = 0{,}2911$

$P(30 < X \leqslant 35) = P(-0{,}02 < Z \leqslant 0{,}80) = 0{,}2963$

$P(35 < X \leqslant 40) = P(0{,}80 < Z \leqslant 1{,}62) = 0{,}1598$

$P(40 < X \leqslant 45) = P(1{,}62 < Z \leqslant 2{,}44) = 0{,}0456$

$P(45 < X \leqslant 50) = P(2{,}44 < Z \leqslant 3{,}26) = 0{,}0069$

Multiplicando las probabilidades obtenidas por el número total de plantas inspeccionadas, 142, resulta:

Tallas en cm	(10-15]	(15-20]	(20-25]	(25-30]	(30-35]	(35-40]	(40-45]	(45-50]
N.º de plantas observadas	2	3	21	44	45	19	7	1
N.º de plantas teórico	1	6	22	41	42	23	6	1