

SOLUCIONES

Examen de Matemáticas I (1º Bachillerato)

UNIDAD 10: INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES.

Notas:

- 1) El examen ha de hacerse limpio, ordenado y sin faltas de ortografía.
- 2) El examen ha de realizarse en bolígrafo, evitando tachones en la medida de lo posible.
- 3) Debe aparecer todas las operaciones, no vale con indicar el resultado.
- 4) Los problemas deben contener: Datos, Planteamiento y Resolución, respondiendo a lo que se pregunte, no vale con indicar un número como solución del problema.

1. Realiza las siguientes derivadas y simplifica el resultado todo lo que sea posible. (2p)

(a) $f(x) = (2x - 3)^3 \cdot (3x - 1)^2$

(b) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

(c) $f(x) = 2 \cdot \sqrt[8]{x^4 - 1}$

(d) $f(x) = \ln(1 + x^2) + 2 \cdot \arctg x$

Solución:

(a) $f'(x) = 6 \cdot (2x - 3)^2 \cdot (3x - 1) \cdot (5x - 4)$

(b) $f'(x) = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}$

(c) $f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt[8]{(x^4 - 1)^7}} = \frac{x^3 \cdot \sqrt[8]{x^4 - 1}}{x^4 - 1}$

(d) $f'(x) = \frac{2x + 2}{1 + x^2}$

2. Realiza las siguientes derivadas y simplifica el resultado todo lo que sea posible. (3p)

(a) $f(x) = x^3 \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

(c) $f(x) = \frac{\text{sen} x}{1 + \text{cos} x}$

(d) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(e) $f(x) = (x - \sqrt{1 - x^2})^2$

Solución:

(a) $f'(x) = e^x \cdot (x^3 + 4x^2 + 2x)$

(b) $f'(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$

(c) $f'(x) = \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - 1})} \cdot \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1}$

(d) $f'(x) = 2 \cdot (x - \sqrt{1 - x^2}) \cdot \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = \frac{4x^2 - 2}{\sqrt{1 - x^2}}$

3. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x=1$. Realiza la representación gráfica de la función y de la recta tangente en dicho punto. (1.5p)

Solución:

Cálculo de la ecuación de la recta tangente

1) Función derivada

$$f'(x) = 6x + 1$$

2) Evaluamos la derivada en el punto, que será la pendiente de la recta tangente.

$$x_0 = 1$$

$$m = f'(1) = 6 \cdot 1 + 1 = 7$$

3) Averiguamos la coordenada y del punto.

$$y_0 = f(x_0) = f(1) = 3$$

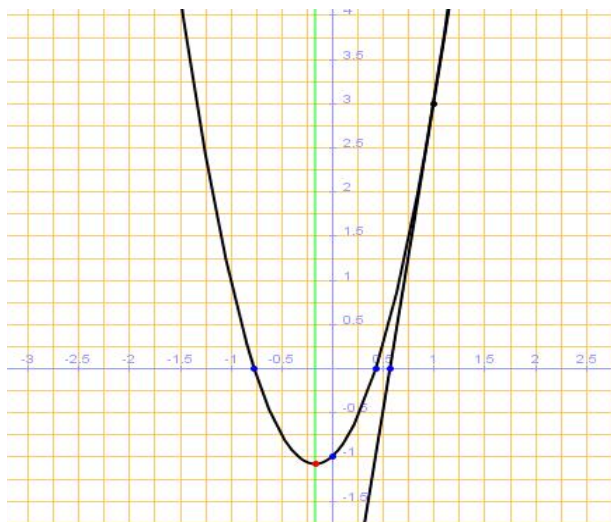
4) La ecuación punto-pendiente de la recta tangente vendrá dada por:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$y - 3 = 7 \cdot (x - 1)$$

$$y = 7x - 4$$

Representación gráfica de la función y de la recta tangente.



4. Halla los puntos donde la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15$ es paralela al eje OX y di si son máximos o mínimos. (1.5p)

Solución:

Antes de comenzar debemos leer el enunciado y recordar que:

- El eje OX tiene pendiente igual a 0 y
- Todas las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

De lo anterior, podemos deducir que: los puntos buscados son aquellos en los que la recta tangente tiene pendiente 0, o lo que es lo mismo, los puntos en los que la derivada primera vale 0 ($f'(x) = 0$)

Cálculo de los puntos cuya recta tangente es paralela al eje OX

1) Función derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

2) Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12x = 0 \rightarrow 3x \cdot (x - 4) = 0 \rightarrow (x = 0) \text{ o } (x - 4 = 0) \rightarrow (x = 0) \text{ o } (x = 4)$$

3) De entre los valores obtenidos, calculamos sus coordenadas y correspondientes y, vemos, cual de ellas es mayor que la otra. De este modo, este punto será el máximo y otro el mínimo.

$$y_0 = f(0) = -15$$

$$y_1 = f(4) = -47$$

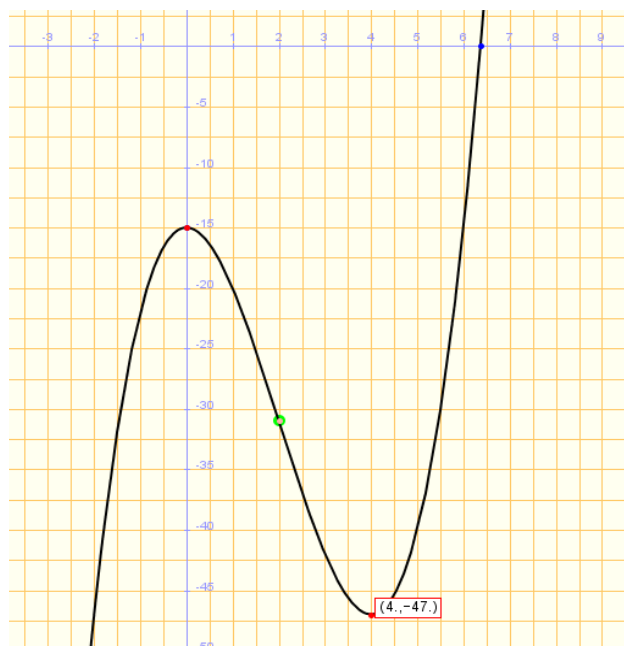
4) Máximos y mínimos.

Como $y_0 > y_1$

– Máximo (0, -15)

– Mínimo (4, -47)

Veámoslo gráficamente.



5. Calcula el punto de corte de las tangentes a las funciones $g(x) = e^{2x}$ y $f(x) = \ln(x + 1)$ en $x = 0$. (2p)

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = 2e^{2x} \rightarrow g'(0) = 2 \\ g(0) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow y = 1 + 2(x - 0) \rightarrow y = 1 + 2x \text{ es la recta tangente a } g(x) \text{ en } x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{x+1} \rightarrow f'(0) = 1 \\ f(0) = \ln 1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow y = 0 + x \rightarrow y = x \text{ es la recta tangente a } f(x) \text{ en } x = 0.$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y = 1 + 2x \\ y = x \end{array} \right\} \rightarrow x = 1 + 2x \rightarrow x = -1 \rightarrow y = -1$$

Las dos rectas tangentes se cortan en el punto $(-1, -1)$.