SOLUCIONES

Examen de Matemáticas I (1º Bachillerato)

UNIDAD 3: ÁLGEBRA

Fecha:

Notas:
1) El examen ha de hacerse limpio, ordenado y sin faltas de ortografía.
2) El examen ha de realizarse en bolígrafo, evitando tachones en la medida de lo posible.
3) Debe aparecer todas las operaciones, no vale con indicar el resultado.
4) Los problemas deben contener: Datos, Planteamiento y Resolución, respondiendo a lo que se pregunte, no vale con indicar un número como solución del problema.

1. Resuelve estas ecuaciones: (1p)

a) $\sqrt{3x+16}=2x-1$ **b)** $\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=1+\frac{4}{x^2}$

Solución:

a) $\sqrt{3x+16}=2x-1$

$3x+16=(2x-1)^2$

$3x+16=4x^2+1-4x$

$0=4x^2-7x-15$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49+240}}{8}=\frac{7\pm\sqrt{289}}{8}=\frac{7\pm 17}{8}\rightarrow\begin{cases}x=3\\ x=\frac{-10}{8}=\frac{-5}{4}\end{cases}$$

Comprobación:

$x=3 \rightarrow \sqrt{25}=5 \rightarrow x=3$ sí vale.

$x=\frac{-5}{4}\rightarrow\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}\neq\frac{-7}{2} \rightarrow x=\frac{-5}{4}$ no vale.

Hay una solución: $x = 3$

b) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=1+\frac{4}{x^2}$

$\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}$

$3x + 2 = x^2 + 4$

$0 = x^2 - 3x + 2$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

2. Factoriza y resuelve: (1.5p)

a) $\boldsymbol{x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = 0}$ **b)** $\mathbf{x^4 - 21x^2 - 100 = 0}$

Solución:

a) Sacamos factor común:

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = x\left(x^3 + x^2 - 9x - 9\right) = 0$$

Factorizamos $x^3 + x^2 - 9x - 9$:

	1	1	−9	−9
−1		−1	0	9
	1	0	−9	0
3		3	9	
	1	3	0	

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = x(x+1)(x-3)(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \\ x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -3$

b) $x^4 - 21x^2 - 100 = 0$

Cambio: $x^2 = z \rightarrow x^4 = z^2$

$z^2 - 21z - 100 = 0$

$$z = \frac{21 \pm \sqrt{441 + 400}}{2} = \frac{21 \pm \sqrt{841}}{2} = \frac{21 \pm 29}{2} \rightarrow \begin{cases} z = 25 \rightarrow x = \pm 5 \\ z = -4 \ \text{(no vale)} \end{cases}$$

Dos soluciones: $x_1 = -5$, $x_2 = 5$

3. Resuelve las ecuaciones que se dan a continuación: (1p)

a) $3^x + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{3} = \frac{79}{9}$ **b)** $ln(3x-1) = ln2 + ln(4x-6)$

Solución:

a) $3^x + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{3} = \frac{79}{9}$

Hacemos el cambio de variable: $3^x = y$

$$y + \frac{1}{y} - \frac{1}{3} = \frac{79}{9} \quad \to \quad 9y^2 + 9 - 3y = 79y$$

$$9y^2 - 82y + 9 = 0$$

$$y = \frac{82 \pm \sqrt{6724 - 324}}{18} = \frac{82 \pm \sqrt{6400}}{18} = \frac{82 \pm 80}{18} \quad \to \quad \begin{cases} y = 9 \\ y = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \end{cases}$$

- $y = 9 \quad \to \quad 3^x = 9 \quad \to \quad x = 2$
- $y = \frac{1}{9} \quad \to \quad 3^x = \frac{1}{9} \quad \to \quad x = -2$

Hay dos soluciones: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

b) $ln(3x-1) = ln2 + ln(4x-6)$

$$ln(3x-1) = ln[2(4x-6)]$$

$$3x - 1 = 2(4x-6) \quad \to \quad 3x - 1 = 8x - 12$$

$$11 = 5x \quad \to \quad x = \frac{11}{5}$$

Hay una única solución: $x = \frac{11}{5}$

4. <u>Problema.</u> Un grupo de amigos tiene que pagar una factura de 500 euros. Si fueran dos amigos más, cada uno de ellos tendría que pagar 12,5 euros menos. ¿Cuántos amigos son? (1.5p)

Solución:

Llamamos x al número de amigos. Cada uno tiene que pagar $\frac{500}{x}$ euros.

Si fueran $x + 2$ amigos (dos amigos más), cada uno tendría que pagar:

$\frac{500}{x} - 12{,}5$ euros (12,5 euros menos)

Como en total son 500 euros, $(x+2)\left(\frac{500}{x} - 12{,}5\right) = 500$

Resolvemos la ecuación:

$$500 - 12{,}5x + \frac{1\,000}{x} - 25 = 500$$

$$-12{,}5x + \frac{1\,000}{x} - 25 = 0$$

$$-12{,}5x^2 + 1\,000 - 25x = 0$$

$$12{,}5x^2 + 25x - 1\,000 = 0$$

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 50000}}{25} = \frac{-25 \pm \sqrt{50625}}{25} = \frac{-25 \pm 225}{25} \rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -10 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

Son, por tanto, 8 amigos.

5. Halla las soluciones de este sistema: (1.25p)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{3x+1} \\ \boldsymbol{\sqrt{x+y+4}} &= \boldsymbol{y-x} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x+1 \\ \sqrt{x+y+4} &= y-x \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y &= 3x+1 \\ \sqrt{x+3x+1+4} &= 3x+1-x \end{aligned}$$

$$\sqrt{4x+5} = 2x+1; \quad 4x+5 = (2x+1)^2$$

$$4x+5 = 4x^2+1+4x; \quad 4 = 4x^2; \quad x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow \text{ no válida, porque } \sqrt{-1+3\cdot(-1)+1+4} = \sqrt{1} = 1 \neq 3\cdot(-1)+1-(-1) = -1 \\ x = 1 \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Hay una solución: x = 1; y = 4

6. Resuelve: (1.25p)

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{2log\ x - log\ y = 0} \\ \mathbf{2^{y+2x} = 8} \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2log\ x - log\ y = 0 \\ 2^{y+2x} = 8 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} log\ x^2 = log\ y \\ 2^{y+2x} = 2^3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^2 = y \\ y + 2x = 3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = y \\ y = 3 - 2x \end{array}\right\} \quad x^2 = 3 - 2x \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \quad \rightarrow \quad y = 1 \\ x = -3 \ \text{ (No válida, porque no existe } log\,(-3)\text{)} \end{cases}$$

Hay una única solución: x = 1, y = 1

7. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método de Gauss: (1.25p)

$$\begin{cases} \mathbf{x - 2y + z = 6} \\ \mathbf{3x + y - z = 7} \\ \mathbf{x - y + 2z = 6} \end{cases}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 6 \\ 3x + y - z = 7 \\ x - y + 2z = 6 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 6 \\ 7y - 4z = -11 \\ y + z = 0 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 7 \cdot 3^a \\ 3^a \end{array}} \rightarrow$$

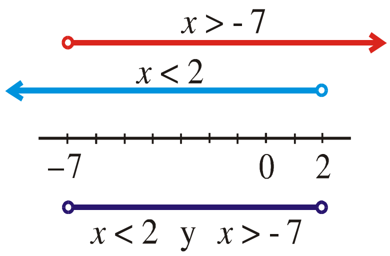
$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 6 \\ -11z = -11 \\ y + z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} z = \dfrac{-11}{-11} = 1 \\ y = -z = -1 \\ x = 6 + 2y - z = 6 - 2 - 1 = 3 \end{array}\right\} \ Solución: \ x = 3 \ , \ y = -1 \ , \ z = 1$$

8. **Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones: (1.25p)**

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{3x - 2 < 4} \\ \mathbf{2x + 6 > x - 1} \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2 < 4 \\ 2x + 6 > x - 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3x < 6 \\ x > -7 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x < 2 \\ x > -7 \end{array}$$



Las soluciones del sistema son las soluciones comunes a las dos inecuaciones, es decir:

$\{x < 2 \ \text{ y } \ x > -7\} = \{x \,/\, -7 < x < 2\} = (-7, 2)$