

SOLUCIONES

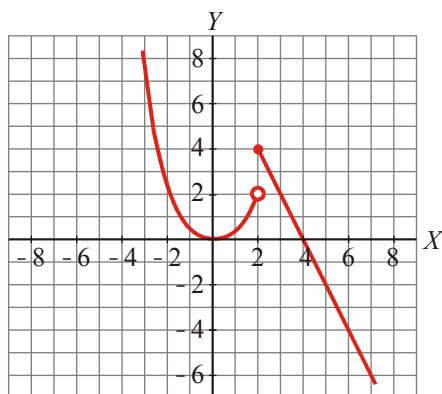
Examen de Matemáticas I (1º Bachillerato)

UNIDAD 9: LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS.

Notas:

- 1) El examen ha de hacerse limpio, ordenado y sin faltas de ortografía.
- 2) El examen ha de realizarse en bolígrafo, evitando tachones en la medida de lo posible.
- 3) Debe aparecer todas las operaciones, no vale con indicar el resultado.
- 4) Los problemas deben contener: Datos, Planteamiento y Resolución, respondiendo a lo que se pregunte, no vale con indicar un número como solución del problema.

1. Dada la siguiente gráfica de $f(x)$, calcula los límites que se indican: (1p)



- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Solución:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$
- d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

2. Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x = 0$: (1p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x^2 + 2x}$$

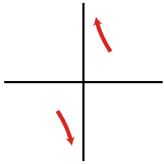
¿Qué significado tiene el límite anterior? Justifica tu respuesta.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x(x+2)}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x^2+2x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x^2+2x} = +\infty$$

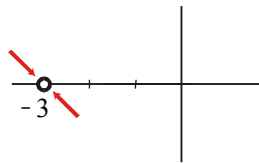


3. Resuelve el siguiente límite e interprétalo gráficamente. (1.25p)

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 + x - 6}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)^2}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)}{(x-2)} = 0$$



4. Halla las asíntotas verticales de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas: (1p)

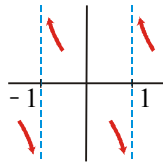
$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$$

Solución:

- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = 1$.
Las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$.
- Posición de la curva respecto a ellas:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$



5. (1p)

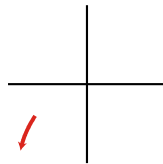
Halla las ramas infinitas, cuando $x \rightarrow -\infty$, de las siguientes funciones y representa los resultados que obtengas:

a) $f(x) = (x - 1)^3$

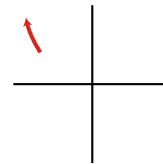
b) $f(x) = x^2 - x$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)^3 = -\infty$

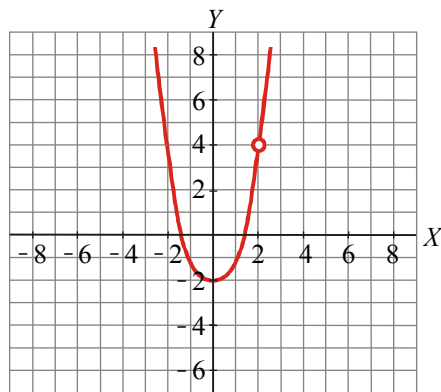


b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) = +\infty$



6. (1p)

Dada la gráfica de $f(x)$:



a) ¿Es continua en $x = 1$? ¿Por qué?

b) ¿Y en $x = 2$? ¿Por qué?

Si no es continua en alguno de los puntos, indica cuál es la razón de la discontinuidad e indica su nombre. Justifica tu respuesta.

Solución:

a) Sí es continua en $x = 1$.

b) No, en $x = 2$ es discontinua porque no está definida en ese punto. Como sí tiene límite en ese punto, es una discontinuidad evitable.

7. (1p)

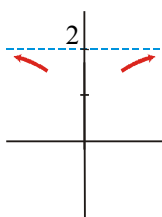
Halla las ramas infinitas, cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$, de la siguiente función y representa los resultados que obtengas. ¿Qué puedes afirmar acerca de las asíntotas según los resultados obtenidos?

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2$$



Con calculadora podemos comprobar que:

- Dando valores muy grandes y positivos ($x \rightarrow +\infty$), la curva va por debajo de la asíntota $y = 2$.
- Dando valores muy grandes y negativos ($x \rightarrow -\infty$), la curva va por debajo de la asíntota $y = 2$.

8. Indica razonadamente si existe algún valor a para el cual la función (1.25p)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$.

Solución:

$f(x)$ será continua en $x = 1$ si se cumple lo siguiente:

1. Existe $f(1) = a$

2. Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = a$

En este caso, no existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Por tanto, no existe ningún valor a que haga que $f(x)$ sea continua.

9. Los gastos mensuales de una familia en alimentación y ropa dependen de sus ingresos x . Así: (1.5p)

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + k & \text{si } 0 \leq x \leq 1200 \\ \frac{1000x}{x + 300} & \text{si } x > 1200 \end{cases}$$

con x y $f(x)$ dados en euros.

- a) Calcula el valor de k para que los gastos sean continuos.
 b) Calcula el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y explica su significado.

Solución:

- a) Para que los gastos sean continuos, $f(x)$ ha de ser continua en $x = 1200$, puesto que para el resto de valores tenemos asegurada la continuidad:

$y = 0,5x + k$ es una función lineal \rightarrow continua en el dominio dado $0 \leq x = 1200$.

$y = \frac{1000x}{x + 300}$ es una función de proporcionalidad inversa, continua en el dominio dado $x > 1200$.

Imponemos la continuidad en $x = 1200$ para calcular k :

$$\left. \begin{array}{l} f(1200) = 0,5 \cdot 1200 + k = 600 + k \\ \lim_{x \rightarrow 1200^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1200} f(0,5x + k) = 600 + k \\ \lim_{x \rightarrow 1200^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1200} \frac{1000x}{x + 300} = 800 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1200^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1200^+} f(x) \rightarrow 600 + k = 800 \rightarrow k = 200$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1000x}{x + 300} = 1000$$

Los gastos mensuales de una familia, por muchos ingresos que tenga, son como máximo: 1 000 euros.