UNIDAD 8 LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO. CÓNICAS

Página 204

1. Lugares geométricos

- **Expresa analíticamente:**

  a) La ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(1, 4)$, $B(7, -2)$.

  b) La ecuación de la circunferencia de centro $C(4, -3)$ y radio 7.

  a) Si $X(x, y)$ es un punto de la mediatriz, entonces: *dist* (X, A) = *dist* (X, B), es decir:

  $\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+2)^2}$. Operamos para simplificar:

  $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 4y + 4$

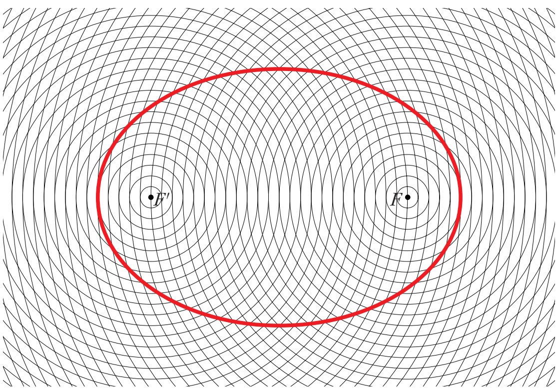
  $12x - 12y - 36 = 0 \quad \to \quad x - y - 3 = 0$

  b) $\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2} = 7 \quad \to \quad (x-4)^2 + (y+3)^2 = 49$

  $x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 49$

  $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 24 = 0$

2. Elipse

- 

  Sobre el entramado anterior, traza la elipse cuya k sea igual a 34.

  $k = 34$

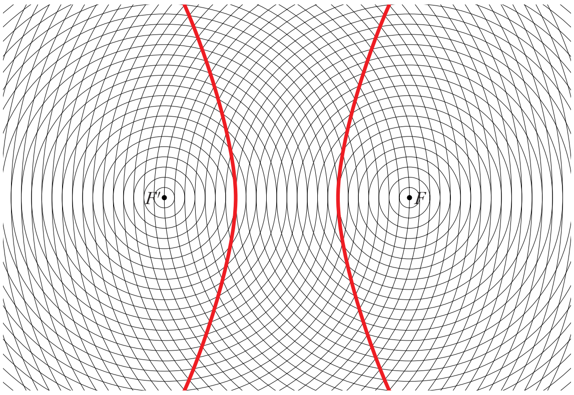
- **Expresa analíticamente la ecuación de la elipse tal que $F(4, 7)$, $F'(-2, 5)$, $k = 20$.**

  Si $X(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces: *dist* (X, F) + *dist* (X, F') = 20

  $$\sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2} = 20$$

Página 205

3. Hipérbola



Sobre el entramado anterior, traza la hipérbola cuya k sea igual a 10.

$k = 10$

- **Expresa analíticamente la ecuación de la hipérbola en la que $F(2, -5)$, $F'(-1, 3)$, $k = 2$.**

Si $X(x, y)$ es un punto de la hipérbola:

$$|dist\,(X, F) + dist\,(X, F')| = 2$$

$$\left|\sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2} - \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}\right| = 2$$

4. Parábola

- **Expresa analíticamente la ecuación de la parábola cuyo foco es $F(5, -3)$ y su directriz d: $2x - 3y + 7 = 0$.**

Si $X(x, y)$ es un punto de la parábola:

$$dist\,(X, F) = dist\,(X, d)$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} = \frac{|2x - 3y + 7|}{\sqrt{13}}$$

Página 207

1. Halla la ecuación de la circunferencia de centro (–5, 12) y radio 13. Comprueba que pasa por el punto (0, 0).

$$(x+5)^2 + (y-12)^2 = 169 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 + 10x - 24y = 0$$

Si sustituimos $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación, esta se verifica. Por tanto, la circunferencia pasa por (0, 0).

2. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a los puntos $M(6, 0)$ y $N(-2, 0)$ es 3 (es decir, $\overline{PM}/\overline{PN} = 3$)?

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = 3 \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{(x-6)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} = 3$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 9\,[(x+2)^2 + y^2]$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9\,[x^2 + 4x + 4 + y^2]$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2$$

$$8x^2 + 8y^2 + 48x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x = 0$$

Es una circunferencia de centro $(-3, 0)$ y radio 3.

Página 209

3. En el ejercicio resuelto anterior, resuelve el sistema de ecuaciones para hallar el punto de tangencia de la recta s_1 y la circunferencia C.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 &= 0 \\ 3x - 4y - 26 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad y = \frac{3x - 26}{4}$$

$$x^2 + \left(\frac{3x - 26}{4}\right)^2 - 6x - 4\left(\frac{3x - 26}{4}\right) - 12 = 0$$

$$x^2 + \frac{9x^2 - 156x + 676}{16} - 6x - 3x + 26 - 12 = 0$$

$$16x^2 + 9x^2 - 156x + 676 - 96x - 48x + 416 - 192 = 0$$

$$25x^2 - 300x + 900 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$(x-6)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 6 \quad \rightarrow \quad y = -2$$

El punto de tangencia es $(6, -2)$.

4. ¿Para qué valor de b la recta $y = x + b$ es tangente a $x^2 + y^2 = 9$?

El centro de la circunferencia es $C(0, 0)$ y el radio es $r = 3$. La distancia de C a la recta $s: x - y + b = 0$ ha de ser igual al radio:

$$dist\,(C, s) = \frac{|b|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} = 3 \quad \rightarrow \quad |b| = 3\sqrt{2} \begin{cases} b = 3\sqrt{2} \\ b = -3\sqrt{2} \end{cases}$$

Luego las rectas $y = x + 3\sqrt{2}$ e $y = x - 3\sqrt{2}$ son tangentes a la circunferencia dada.

5. Halla la posición relativa de la circunferencia: $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ respecto a las rectas: $s_1: x + y = 10$, $s_2: 4x + 3y + 20 = 0$ y $s_3: 3x - 4y = 0$.

El centro de la circunferencia es $O_c(3, -4)$ y su radio es $r = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Hallamos la distancia de O_c a cada una de las rectas:

$$d_1 = dist\,(O_c, s_1) = \frac{|3 - 4 - 10|}{\sqrt{2}} = \frac{11}{\sqrt{2}} \approx 7{,}78$$

$$d_2 = dist\,(O_c, s_2) = \frac{|12 - 12 + 10|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$d_3 = dist\,(O_c, s_3) = \frac{|9 + 16|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{25}{5} = 5$$

$d_1 > r \;\to\;$ La recta s_1 es *exterior* a la circunferencia.

$d_2 < r \;\to\;$ La recta s_2 y la circunferencia son *secantes*.

$d_3 = r \;\to\;$ La recta s_3 es *tangente* a la circunferencia.

Página 211

6. Halla los puntos de intersección de las circunferencias C_1 y C_2:

C_1: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ $\qquad$ C_2: $x^2 + y^2 = 5$

¿Cuál es la posición relativa de las dos circunferencias dadas?

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 \qquad\qquad\quad\;\; = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5 - 4x + 2y - 5 = 0 \;\to\; -4x + 2y = 0 \\ y = 2x \end{array}$$

$$x^2 + 4x^2 = 5 \;\to\; 5x^2 = 5 \;\to\; x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \;\to\; y = 2 \\ x = -1 \;\to\; y = -2 \end{cases}$$

Se cortan en los puntos (1, 2) y (–1, –2). Por tanto, las circunferencias son secantes.

7. Halla los puntos de intersección de cada pareja de circunferencias y di cuál es su posición relativa:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 12y + 15 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 12y + 33 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 3^2 \\ x^2 + (y - 4)^2 = 5^2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4x - 12y + 15 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 12y + 33 = 0 \end{array}\right\}$ Restando a la 2ª ecuación la 1ª: $6x + 18 = 0 \;\to\; x = -3$

$$9 + y^2 + 12 - 12y + 15 = 0 \;\to\; y^2 - 12y + 36 = 0 \;\to\; (y - 6)^2 = 0 \;\to\; y = 6$$

Se cortan en el punto (–3, 6).

Para ver si son tangentes exteriores o interiores, comparamos la distancia, d, entre sus centros con la suma y la diferencia de sus randios, $r_1 + r_2$ y $r_1 - r_2$.

$C_1 \;\to\;$ centro $O_1(2, 6)$ y radio $r_1 = \sqrt{4 + 36 - 15} = \sqrt{25} = 5$

$C_2 \;\to\;$ centro $O_2(-1, 6)$ y radio $r_2 = \sqrt{1 + 36 - 33} = \sqrt{4} = 2$

$d = dist\,(O_1, O_2) = 3 = r_1 - r_2 \;\to\;$ Son tangentes interiores.

b) $\left.\begin{array}{r}(x-2)^2+(y-2)^2=3^2\\ x^2+(y-4)^2=5^2\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}x^2-4x+4+y^2-4y+4=9\\ x^2+y^2-8y+16=25\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2-4x-4y-1=0\\ x^2+y^2-8y-9=0\end{array}\right\}$ Restando a la 1ª ecuación la 2ª: $-4x+4y+8=0 \ \to$ $\to\ -x+y+2=0\ \to\ x=y+2$

$(y+2)^2+y^2-8y-9=0 \ \to\ y^2+4y+4+y^2-8y-9=0$

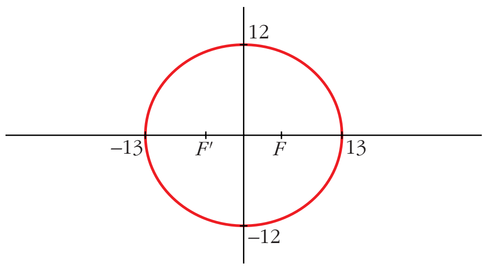
$2y^2-4y-5=0 \ \to\ y=\dfrac{4\pm\sqrt{16+40}}{4}=\dfrac{4\pm\sqrt{56}}{4} \begin{array}{l} y=\ \ 2{,}87 \to x=4{,}87 \\ y=-0{,}87 \to x=1{,}13\end{array}$

Son secantes. Se cortan en los puntos (4,87; 2,87) y (1,13; –0,87).

Página 213

1. Una elipse tiene sus focos en los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y su constante es $k = 26$. Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.

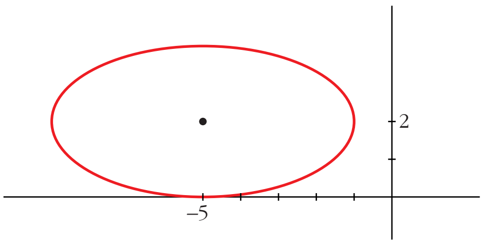
- Semieje mayor: $k = 26 \ \to\ 2a = 26 \ \to\ a = 13$
- Semidistancia focal: $\overline{FF'} = 10 \ \to\ 2c = 10 \ \to\ c = 5$
- Semieje menor: $b^2 = a^2 - c^2 = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12 \ \to\ b = 12$
- Excentricidad: $\dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{13} \approx 0{,}38 \ \to\ exc \approx 0{,}38$
- Ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$



Página 214

2. Representa y di su excentricidad:

$$\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$



$c = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$

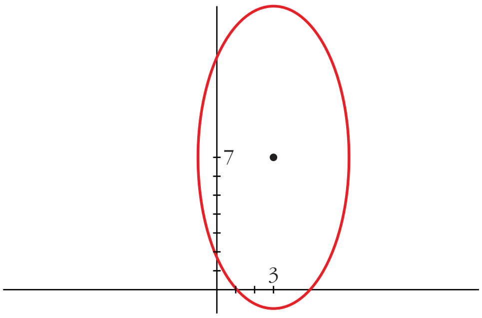
$exc = \dfrac{\sqrt{12}}{4} \approx 0{,}87$

3. Representa y di su excentricidad:

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$$

$c = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48}$

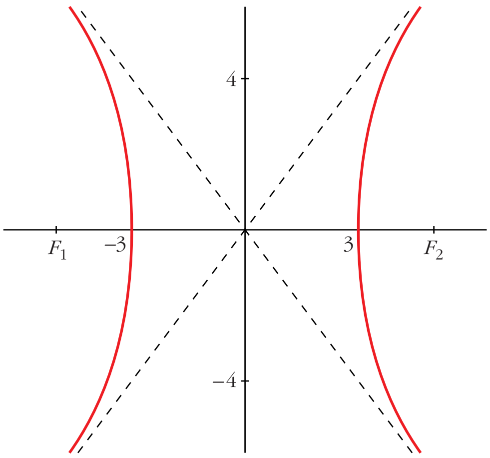
$exc = \frac{\sqrt{48}}{8} \approx 0{,}87$



Página 216

1. Una hipérbola tiene sus focos en los puntos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y su constante es $k = 6$. Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.

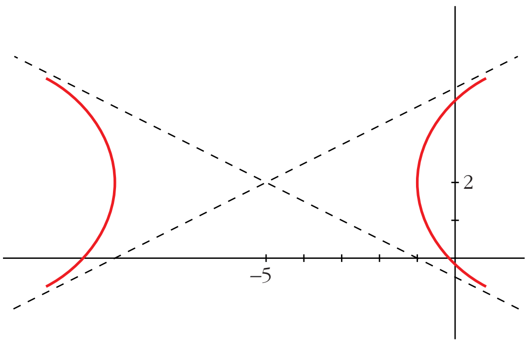
- Semieje: $k = 2a = 6 \rightarrow a = 3$
- Semidistancia focal: $\overline{F_1F_2} = 10 \rightarrow c = 5$
- Cálculo de b: $b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow b = 4$
- Excentricidad: $exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$
- Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x$; $y = -\frac{4}{3}x$
- Ecuación reducida: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$



Página 217

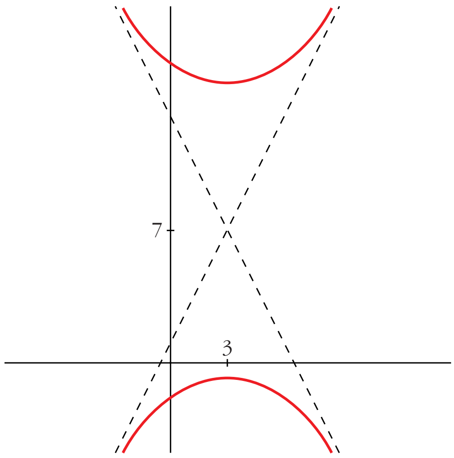
2. Representa:

$$\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$



3. Representa:

$$\frac{(y-7)^2}{64} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$$



Página 218

1. Halla la ecuación reducida de la parábola de foco $F(1{,}5;\ 0)$ y directriz $x = -1{,}5$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: $dist\ (P, F) = dist\ (P, d)$, donde d es la directriz y F el foco.

$$\sqrt{(x-1{,}5)^2 + y^2} = |x + 1{,}5|$$

$$x^2 - 3x + 2{,}25 + y^2 = x^2 + 3x + 2{,}25 \quad \to \quad y^2 = 6x$$

- De otra forma:

  Distancia del foco a la directriz: $p = 3$

  Ecuación reducida: $y^2 = 6x$

2. Halla la ecuación reducida de la parábola de foco $F(0, 2)$ y directriz $y = -2$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: $dist\ (P, F) = dist\ (P, d)$, donde d es la directriz y F el foco.

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y + 2|$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \quad \to \quad x^2 = 8y$$

- De otra forma:

  Distancia del foco a la directriz: $p = 4$

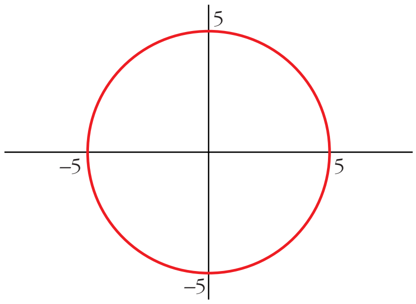
  Ecuación reducida: $x^2 = 8y$.

Página 220

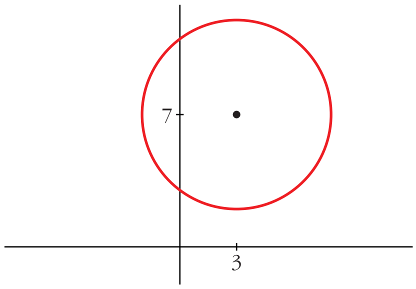
1. Representa las siguientes curvas:

a) $\begin{cases} x = 5 \cos \alpha \\ y = 5 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 + 5 \cos \alpha \\ y = 7 + 5 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 3 \cos \alpha \\ y = 7 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = 2 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$

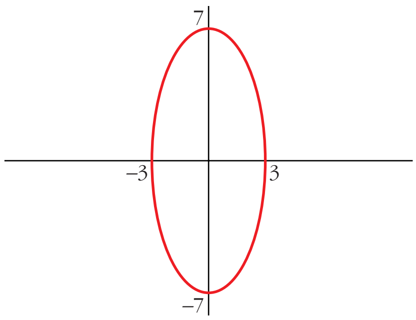
a) Circunferencia de centro (0, 0) y radio 5:



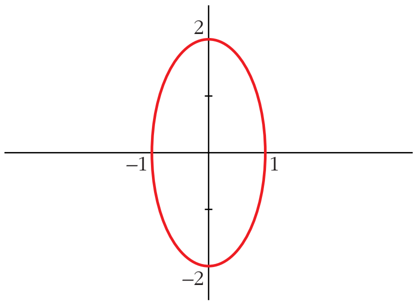
b) Circunferencia de centro (3, 7) y radio 5:



c) Elipse de centro (0, 0) y semiejes 3 y 7:



d) Elipse de centro (0, 0) y semiejes 1 y 2:

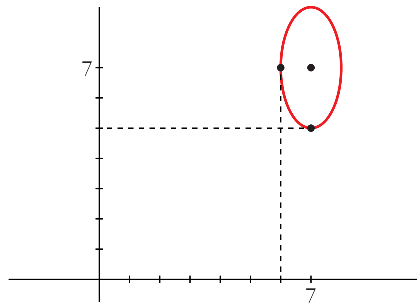


2. **Representa estas curvas:**

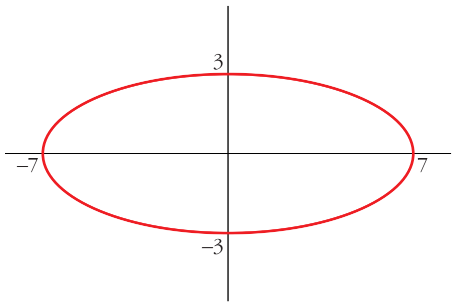
a) $\begin{cases} x = 7 + \cos \alpha \\ y = 7 + 2 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 7 \cos \alpha \\ y = 3 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2 + 3 \cos \alpha \\ y = -4 + 3 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = 2 + 2 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$

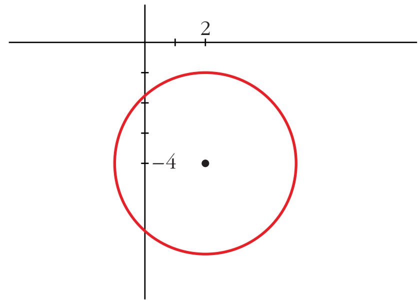
a) Elipse de centro (7, 7) y semiejes 1 y 2:



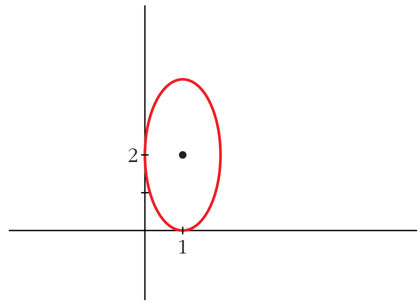
b) Elipse de centro (0, 0) y semiejes 7 y 3:



c) Circunferencia de centro (2, –4) y radio 3:



d) Elipse de centro (1, 2) y semiejes 1 y 2:



Página 221

1. Halla el L. G. de los puntos que equidistan de:

a) $A(4, -1, 7)$ **y** $B(-2, 5, 1)$

b) $\pi: x + y + z - 2 = 0$ **y** $\pi': x - y + z - 2 = 0$

c) $\pi: x - 3y + 2z - 8 = 0$ **y** $\pi': x - 3y + 2z = 0$

a) $dist\ (X, A) = dist\ (X, B)$

$$\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2+(z-7)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2}$$

$$x^2-8x+16+y^2+2y+1+z^2-14z+49 = x^2+4x+4+y^2-10y+25+z^2-2z+1$$

$$-12x+12y-12z+36=0 \ \to \ x-y+z-3=0$$

Es el plano mediador del segmento AB.

b) $dist\ (X, \pi) = dist\ (X, \pi')$

$$\frac{|x+y+z-2|}{\sqrt{3}} = \frac{|x-y+z-2|}{\sqrt{3}}$$ Dos posibilidades:

- $x+y+z-2 = x-y+z-2 \ \to \ 2y=0 \ \to \ y=0$
- $x+y+z-2 = -x+y-z+2 \ \to \ 2x+2z-4=0 \ \to \ x+z-2=0$

Son los planos bisectores de los ángulos diedros formados por π y π'. Los dos planos obtenidos se cortan en la recta r determinada por los puntos (1, 0, 1) y (0, 0, 2), al igual que π y π'. Además, son perpendiculares, pues $(0, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = 0$.

c) $dist\ (X, \pi) = dist\ (X, \pi')$

$$\frac{|x-3y+2z-8|}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{|x-3y+2z|}{\sqrt{1+9+4}}$$ Dos posibilidades:

- $x-3y+2z-8 = x-3y+2z \ \to \ -8=0 \ \to$ Imposible.
- $x-3y+2z-8 = -x+3y-2z \ \to \ 2x-6y+4z-8=0 \ \to \ x-3y+2z-4=0$

Los planos π y π' son paralelos. El plano obtenido es también paralelo a ellos.

Página 222

2. Averigua si $x^2+y^2+z^2+2x-10y+25=0$ corresponde a la ecuación de una esfera, y halla su centro y su radio.

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2+\left(\frac{C}{2}\right)^2-D} = \sqrt{1+25+0-25} = 1$$

Es una esfera de radio 1. Su centro es (–1, 5, 0).

3. Halla el radio de la circunferencia en la que el plano $4x-3z-33=0$ corta a la esfera $(x-2)^2+(y+5)^2+z^2=169$.

La esfera tiene el centro en $Q(2, -5, 0)$ y su radio es $R = 13$.

La distancia de Q al plano es: $d = \dfrac{|8-0-33|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{25}{5} = 5$

Por tanto: $r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$

El radio de la circunferencia es 12.

4. **Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya suma de cuadrados de distancias a $O(0, 0, 0)$ y $Q(10, 0, 0)$ es 68. Comprueba que se trata de una esfera de centro (5, 0, 0) y radio 3.**

$$(x^2 + y^2 + z^2) + [(x - 10)^2 + y^2 + z^2] = 68$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - 20x + 100 + y^2 + z^2 = 68$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20x + 32 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Es una esfera de centro (5, 0, 0) y radio 3.

Página 223

5. **Halla el L. G. de los puntos cuya suma de distancias a $F(0, 0, 5)$ y $F'(0, 0, -5)$ es 26.**

$$dist\ (X, F) + dist\ (X, F') = 26$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 26$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} = 26 - \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2}$$

$$x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 676 + x^2 + y^2 + (z + 5)^2 - 52\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2}$$

$$52\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 676 + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} + \cancel{25} + 10z - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} - \cancel{z^2} - \cancel{25} + 10z$$

$$52\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 20z + 676$$

$$13\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 5z + 169$$

$$169\,[x^2 + y^2 + (z + 5)^2] = 25z^2 + 1\,690z + 28\,561$$

$$169\,[x^2 + y^2 + z^2 + 10z + 25] = 25z^2 + 1\,690z + 28\,561$$

$$169x^2 + 169y^2 + 169z^2 + \cancel{1\,690z} + 4\,225 = 25z^2 + \cancel{1\,690z} + 28\,561$$

$$169x^2 + 169y^2 + 144z^2 = 24\,336$$

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{144} + \frac{z^2}{169} = 1$$

Es un elipsoide.

6. **Halla el L. G. de los puntos cuya diferencia de distancias a $F(5, 0, 0)$ y $F'(-5, 0, 0)$ es 6.**

$$|dist\ (X, F) - dist\ (X, F')| = 6$$

$$\sqrt{(x - 5)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6$$

$$\sqrt{(x - 5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6 + \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2}$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 = 36 + (x + 5)^2 + y^2 + z^2 \pm 12\sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2}$$

$\cancel{x^2} - 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} = 36 + \cancel{x^2} + 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2}$

$\pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = 20x + 36$

$\pm 3\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = 5x + 9$

$9[x^2 + 10x + 25 + y^2 + z^2] = 25x^2 + 90x + 81$

$9x^2 + \cancel{90x} + 225 + 9y^2 + 9z^2 = 25x^2 + \cancel{90x} + 81$

$-16x^2 + 9y^2 + 9z^2 = -144$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1$

Es un hiperboloide.

7. Halla el L. G. de los puntos que equidistan del plano $x + \frac{1}{4} = 0$ y del punto $\left(\frac{1}{4}, 0, 0\right)$. ¿A qué se parece la ecuación obtenida?

$dist\ (X, F) = dist\ (X, \pi)$, donde π: $x + \frac{1}{4} = 0$ y $F\left(\frac{1}{4}, 0, 0\right)$.

$\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 + z^2} = \left|x + \frac{1}{4}\right|$

$\cancel{x^2} - \frac{1}{2}x + \cancel{\frac{1}{16}} + y^2 + z^2 = \cancel{x^2} + \frac{1}{2}x + \cancel{\frac{1}{16}}$

$x = y^2 + z^2$

Es un paraboloide. Su ecuación es muy similar a la de una parábola.

Página 228

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Circunferencia

1 Averigua cuáles de las siguientes expresiones corresponden a circunferencias y, en ellas, halla su centro y su radio:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$

b) $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 6x + 10y = -30$

a) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 1 - 10 = 7 > 0.$

Es una circunferencia de centro $(4, -1)$ y radio $\sqrt{7}$

b) Los coeficientes de x^2 e y^2 no son iguales. No es una circunferencia.

c) Hay un término xy. No es una circunferencia.

d) Los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales y no tiene término en xy. Dividimos entre 2 la igualdad: $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 0 - 12 = 4 > 0.$$

Es una circunferencia de centro $(4, 0)$ y radio $\sqrt{4} = 2$.

e) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 9 + 25 - 30 = 4 > 0$$

Es una circunferencia de centro $(-3, -5)$ y radio 2.

2 **Los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 6)$ son los extremos de un diámetro de una circunferencia C. Halla su ecuación.**

El centro de la circunferencia es el punto medio del segmento AB:

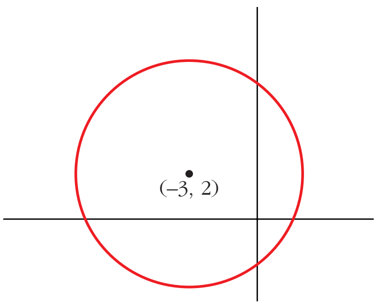
$$P = \text{Centro} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (2, 4)$$

El radio es la distancia del centro a uno de los puntos:

$$r = dist\,(P, A) = |\overrightarrow{PA}| = |(-1, -2)| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Por tanto, la ecuación es: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0$

3 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que distan 5 unidades del punto $P(-3, 2)$? Represéntalo gráficamente y halla su ecuación.**



Es una circunferencia de centro $P(-3, 2)$ y radio 5.

Ecuación: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$

$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$

4 **Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $C(-2, 1)$ y que pasa por $P(0, -4)$.**

El radio de la circunferencia es la distancia de P a C:

$$r = |\overrightarrow{PC}| = |(-2, 5)| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

La ecuación es: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 29$, o bien, $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 24 = 0$

5 **Estudia la posición de la recta $x + y = 0$ con relación a la circunferencia: $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$.**

El centro de la circunferencia es $C(-3, -1)$ y su radio es $r = \sqrt{9 + 1 - 6} = \sqrt{4} = 2$.

Hallamos la distancia de C a la recta $s: x + y = 0$:

$$d = dist\,(C, s) = \frac{|-3 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83 > 2 = r$$

La recta es *exterior* a la circunferencia.

6 **¿Para qué valor de b la recta $y = x + b$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$?**

El centro de la circunferencia es $C(0, 0)$ y su radio es $r = 1$.

Hallamos la distancia de C a la recta $s: x - y + b = 0$: $d = dist\,(C, s) = \dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = r$, es decir:

$$\frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1 \;\to\; |b| = \sqrt{2} \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{cases}$$

7 **Halla los puntos de intersección de cada pareja de circunferencias y di cuál es su posición relativa:**

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 \qquad\qquad = 4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 4 - 6x - 16 = 0 \;\to\; -6x = 12 \;\to\; x = -2 \\ 4 + y^2 = 4 \;\to\; y^2 = 0 \;\to\; y = 0 \end{array}$

Las circunferencias se cortan en el punto $(-2, 0)$.

La primera circunferencia tiene centro en $(3, 0)$ y radio 5; la segunda tiene centro en $(0, 0)$ y radio 2. La distancia entre sus centros es $d = 3$. Como la diferencia entre sus radios es $5 - 2 = 3 = d$, las circunferencias son tangentes interiores.

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \end{array}\right\}$ Restando a la 2ª ecuación la 1ª: $6y = 0 \;\to\; y = 0$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \;\to\; (x - 3)^2 = 0 \;\to\; x = 3$$

Las circunferencias se cortan en el punto $(3, 0)$.

La primera circunferencia tiene su centro en $(3, 2)$ y radio 2; la segunda tiene su centro en $(3, -1)$ y radio 1. La distancia entre sus centros es $d = 3$, igual que la suma de sus radios. Por tanto, las circunferencias son tangentes exteriores.

8 **Halla la longitud de la cuerda común a las circunferencias de ecuaciones: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ y $x^2 + y^2 - 4 = 0$.**

Hallamos los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 \qquad\qquad\quad - 4 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -4x + 2y = 0 \;\rightarrow\; y = 2x \\ x^2 + 4x^2 - 4 = 0 \;\rightarrow\; 5x^2 = 4 \end{array}$$

$$x^2 = \frac{4}{5} \begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \;\rightarrow\; y_1 = \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{-2}{\sqrt{5}} = \dfrac{-2\sqrt{5}}{5} \;\rightarrow\; y_2 = \dfrac{-4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Las dos circunferencias se cortan en $P\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ y en $Q\left(\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{-4\sqrt{5}}{5}\right)$.

La longitud de la cuerda común es igual a la distancia entre P y Q:

$$dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{5} + \frac{64}{5}} = \sqrt{16} = 4$$

9 **Calcula la distancia del centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ a la recta r: $2x - y + 3 = 0$. ¿Cuál es la posición de r respecto a la circunferencia?**

El centro de la circunferencia es $C(0, 1)$ y su radio es $R = \sqrt{2}$. La distancia de C a r es:

$$dist\,(C, r) = \frac{|-1 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}89 < \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

Luego la circunferencia y la recta son secantes.

Elipse

10 **Halla los vértices, los focos, los puntos en los ejes, las excentricidades, y representa las elipses dadas por sus ecuaciones:**

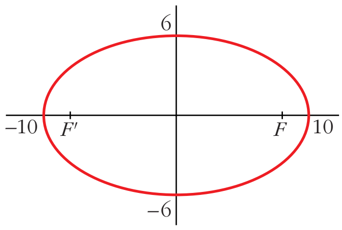
a) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ **b)** $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1$ **c)** $9x^2 + 25y^2 = 25$ **d)** $9x^2 + 4y^2 = 1$

a) **Vértices:** (10, 0); (–10, 0); (0, 6) y (0, –6).

Focos: $c = \sqrt{100 - 36} = 8$

$F(8, 0)$ y $F'(-8, 0)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

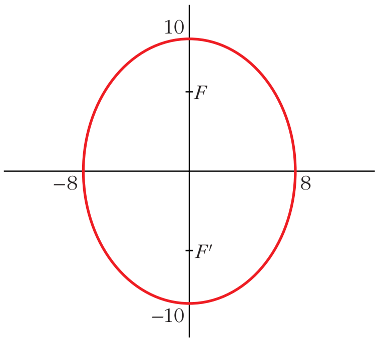


b) **Vértices:** (8, 0); (–8, 0); (0, 10) y (0, –10).

Focos: $c = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$

$F(0, 6)$ y $F'(0, -6)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$



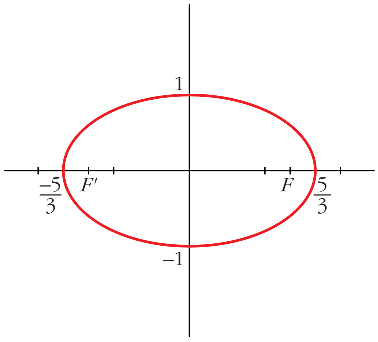
c) $9x^2 + 25y^2 = 25 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{25/9} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

Vértices: $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$; $\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$; (0, 1) y (0, –1).

Focos: $c = \sqrt{\dfrac{25}{9} - 1} = \sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}$

$F\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$ y $F'\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{4/3}{5/3} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

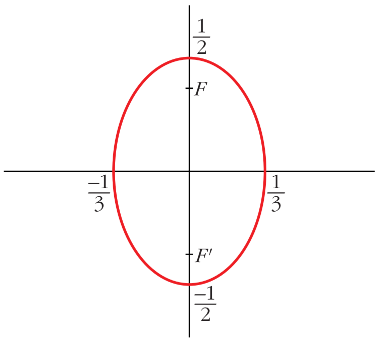


d) $9x^2 + 4y^2 = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{1/9} + \dfrac{y^2}{1/4} = 1$

Vértices: $\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$; $\left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)$; $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Focos: $c = \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{5}{36}} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$

$F\left(0, \dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)$ y $F'\left(0, -\dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)$



11 **Halla las ecuaciones de las elipses determinadas de los modos siguientes:**

a) Focos (–2, 0), (2, 0). Longitud del eje mayor, 10.

b) *F*(–3, 0) y *F'*(3, 0) y cuya excentricidad es igual a 0,5.

c) Eje mayor sobre el eje *X*, 10. Pasa por el punto (3, 3).

d) Eje mayor sobre el eje *Y*, 2. Excentricidad, 1/2.

a) $c = 2$; $2a = 10 \;\rightarrow\; a = 5$; $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$

b) $c = 3;\ \ exc = \dfrac{c}{a} = 0{,}5 \ \ \rightarrow \ \ a = \dfrac{c}{0{,}5} = \dfrac{3}{0{,}5} = 6$

$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 9 = 27$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$

c) $2a = 10 \ \ \rightarrow \ \ a = 5;\ \ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Como pasa por (3, 3) $\rightarrow \ \ \dfrac{9}{25} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \ \ \rightarrow \ \ 9b^2 + 225 = 25b^2 \ \ \rightarrow$

$\rightarrow \ \ 16b^2 = 225 \ \ \rightarrow \ \ b^2 = \dfrac{225}{16}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{225/16} = 1$, o bien, $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{16y^2}{225} = 1$

d) $exc = \dfrac{c}{1} = \dfrac{1}{2} \ \ \rightarrow \ \ c = \dfrac{1}{2}$ $(a = 1,\ \text{pues}\ \ 2a = 2)$

$b^2 = a^2 - c^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{3/4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$, o bien, $\dfrac{4x^2}{3} + y^2 = 1$

12 Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$ es 10.

Es una elipse de focos $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$, y constante $k = 10$, es decir, $2a = 10$ y $c = 4$.

Así: $a = 5;\ \ b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$

La ecuación será: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

13 Halla los puntos de intersección de la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ con la circunferencia cuyo centro es el origen y pasa por los focos.

Los focos de la elipse son:

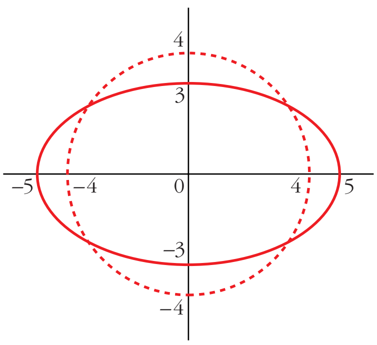
$c^2 = a^2 - b^2 \ \ \rightarrow \ \ c^2 = 25 - 9 = 16 \ \ \rightarrow \ \ c = 4$

$F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$

Luego la circunferencia tiene su centro en (0, 0) y radio 4.

La ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 = 16$.

Hallamos los puntos de intersección de la circunferencia con la elipse:



$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 16 \\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y^2 = 16 - x^2 \\ 9x^2 + 25y^2 = 225 \quad \to \quad 9x^2 + 25(16 - x^2) = 225 \end{array}$$

$$9x^2 + 400 - 25x^2 = 225 \quad \to \quad 175 = 16x^2 \quad \to \quad x^2 = \frac{175}{16}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{175}{16}} = \frac{\pm 5\sqrt{7}}{4} \begin{cases} x = \dfrac{5\sqrt{7}}{4} \quad \to \quad y = \pm\dfrac{9}{4} \\ x = \dfrac{-5\sqrt{7}}{4} \quad \to \quad y = \pm\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

Hay cuatro puntos: $\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{4}, \dfrac{9}{4}\right)$; $\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{4}, -\dfrac{9}{4}\right)$; $\left(\dfrac{-5\sqrt{7}}{4}, \dfrac{9}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{-5\sqrt{7}}{4}, -\dfrac{9}{4}\right)$

14 Calcula la longitud de la cuerda definida por la elipse $x^2 + 3y^2 = 28$ y la recta $5x + 3y = 14$.

Hallamos los puntos de corte de la recta y la elipse:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 3y = 14 \\ x^2 + 3y^2 = 28 \end{array}\right\} x = \frac{14 - 3y}{5}$$

$$\left(\frac{14 - 3y}{5}\right)^2 + 3y^2 = 28 \quad \to \quad \frac{196 - 84y + 9y^2}{25} + 3y^2 = 28$$

$$196 - 84y + 9y^2 + 75y^2 = 700 \quad \to \quad 84y^2 - 84y - 504 = 0$$

$$y^2 - y - 6 = 0 \quad \to \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} y = 3 \quad \to \quad x = 1 \\ y = -2 \quad \to \quad x = 4 \end{cases}$$

Se cortan en los puntos $P(1, 3)$ y $Q(4, -2)$.

La longitud de la cuerda es la distancia entre P y Q:

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(3, -5)| = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$$

15 Escribe la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y focos en el eje de abscisas, sabiendo que pasa por el punto $P(8, -3)$ y que su eje mayor es igual al doble del menor.

El eje mayor es igual al doble del menor, es decir: $a = 2b$. Además, pasa por el punto $P(8, -3)$. Luego:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \to \quad \frac{64}{4b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \quad \to \quad \frac{16}{b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \quad \to \quad \frac{25}{b^2} = 1 \quad \to$$

$$\to \quad 25 = b^2; \quad a^2 = 4b^2 = 100$$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

16 **Escribe la ecuación de la elipse de focos $F(1, 1)$ y $F'(1, -1)$ y cuya constante es igual a 4.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$$dist\,(P, F) + dist\,(P, F') = 2a, \text{ es decir:}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 4$$

Operamos para simplificar:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 4 - \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16 + (x-1)^2 + (y+1)^2 - 8\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{1} - \cancel{2x} + \cancel{y^2} + \cancel{1} - 2y = 16 + \cancel{x^2} + \cancel{1} - \cancel{2x} + \cancel{y^2} + \cancel{1} + 2y - 8\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

$$-4y - 16 = -8\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

$$(4y + 16)^2 = 64\,[(x-1)^2 + (y+1)^2]$$

$$16y^2 + 256 + 128y = 64\,[x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 + 2y]$$

$$16y^2 + 256 + \cancel{128y} = 64x^2 + 64 - 128x + 64y^2 + 64 + \cancel{128y}$$

$$128 = 64x^2 - 128x + 48y^2$$

$$8 = 4x^2 - 8x + 3y^2$$

$$12 = 4x^2 - 8x + 4 + 3y^2$$

$$12 = (2x-2)^2 + 3y^2$$

$$12 = 4(x-1)^2 + 3y^2$$

$$1 = \frac{4(x-1)^2}{12} + \frac{3y^2}{12}$$

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$$

- De otra forma:

El centro de la elipse es el punto medio del segmento que une F con F', es decir:

$$\left(\frac{1+1}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = (1, 0)$$

Por otra parte:

$$2c = dist\,(F, F') = |\overrightarrow{F'F}| = |(0, 2)| = 2 \;\rightarrow\; c = 1$$

$$2a = 4 \;\rightarrow\; a = 2 \;\rightarrow\; a^2 = 4$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$$

Por tanto, la ecuación es: $\dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Página 229

Hipérbola

17 **Halla los vértices, los focos, las excentricidades y las asíntotas, y dibuja las hipérbolas dadas por las ecuaciones:**

a) $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{36} = 1$ **b)** $\dfrac{9x^2}{16} - y^2 = 1$

c) $x^2 - 4y^2 = 1$ **d)** $x^2 - 4y^2 = 4$

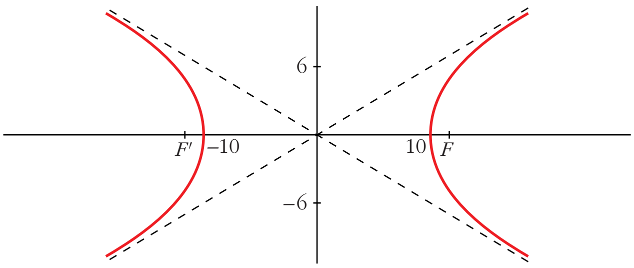
e) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{36} = 1$ **f)** $y^2 - 16x^2 = 16$

g) $9x^2 - 4y^2 = 36$ **h)** $4x^2 - y^2 + 16 = 0$

a) $a = 10,\ \ b = 6,\ \ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34},\ \ exc = \dfrac{2\sqrt{34}}{10} \approx 1{,}17$

Vértices: $(10, 0)$ y $(-10, 0)$. **Focos:** $F(2\sqrt{34}, 0)$ y $F'(-2\sqrt{34}, 0)$

Asíntotas: $y = \dfrac{3}{5}x;\ \ y = -\dfrac{3}{5}x$

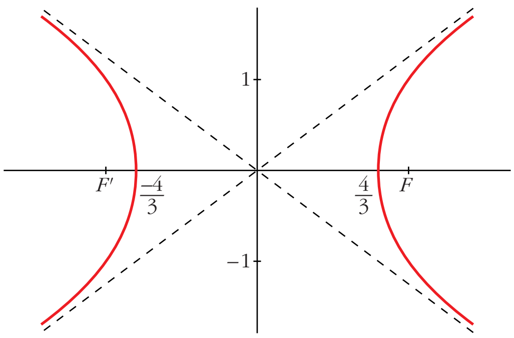


b) $\dfrac{9x^2}{16} - y^2 = 1 \ \rightarrow\ \dfrac{x^2}{16/9} - \dfrac{y^2}{1} = 1$

$a = \dfrac{4}{3},\ \ b = 1,\ \ c = \sqrt{\dfrac{16}{9} + 1} = \dfrac{5}{3},\ \ exc = \dfrac{5/3}{4/3} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

Vértices: $\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$ y $\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$. **Focos:** $F\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$ y $F'\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$

Asíntotas: $y = \dfrac{3}{4}x;\ \ y = -\dfrac{3}{4}x$

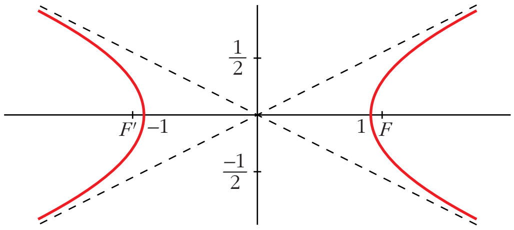


c) $x^2 - 4y^2 = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{1/4} = 1$

$a = 1,\; b = \dfrac{1}{2},\; c = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2},\; exc = \dfrac{\sqrt{5}/2}{1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

Vértices: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. **Focos:** $F\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ y $F'\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

Asíntotas: $y = \dfrac{1}{2}x;\; y = -\dfrac{1}{2}x$

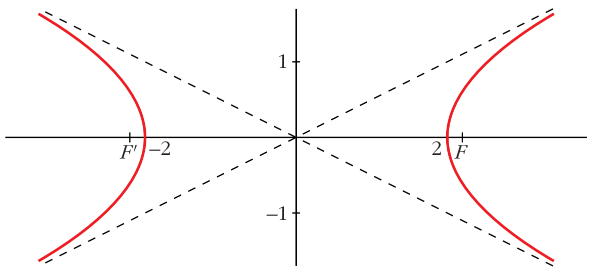


d) $x^2 - 4y^2 = 4 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1} = 1$

$a = 2,\; b = 1,\; c = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5},\; exc = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

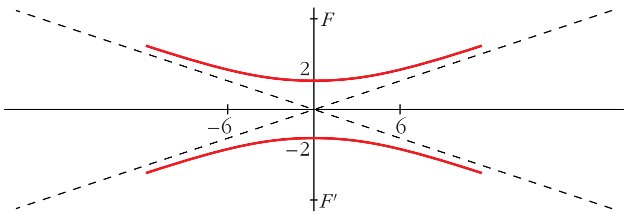
Vértices: $(2, 0)$ y $(-2, 0)$. **Focos:** $F(\sqrt{5}, 0)$ y $F'(-\sqrt{5}, 0)$

Asíntotas: $y = \dfrac{1}{2}x;\; y = -\dfrac{1}{2}x$



e) **Vértices:** $(0, 2)$ y $(0, -2)$. **Focos:** $F(0, \sqrt{40})$ y $F'(0, -\sqrt{40})$

$exc = \dfrac{\sqrt{40}}{2} \approx 3{,}16$. **Asíntotas:** $y = \dfrac{1}{3}x;\; y = -\dfrac{1}{3}x$



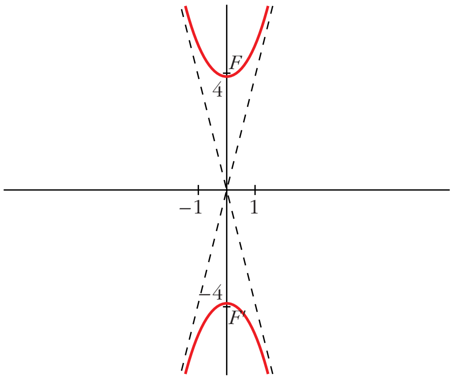
f) $y^2 - 16x^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{1} = 1$

Vértices: $(0, 4)$ y $(0, -4)$

Focos: $F(0, \sqrt{17})$ y $F'(0, -\sqrt{17})$

$exc = \dfrac{\sqrt{17}}{4} \approx 1{,}03.$

Asíntotas: $y = 4x$; $y = -4x$



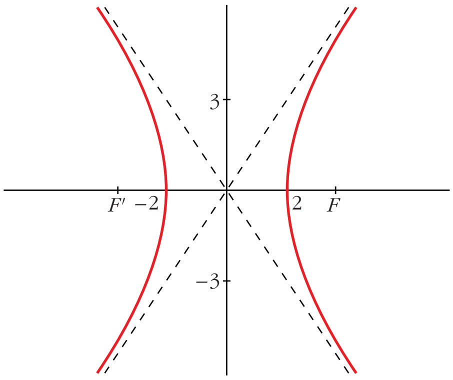
g) $9x^2 - 4y^2 = 36 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Vértices: $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

Focos: $F(\sqrt{13}, 0)$ y $F'(-\sqrt{13}, 0)$

$exc = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}80.$

Asíntotas: $y = \dfrac{3}{2}x$; $y = -\dfrac{3}{2}x$



h) $4x^2 - y^2 + 16 = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 - 4x^2 = 16 \quad \rightarrow$

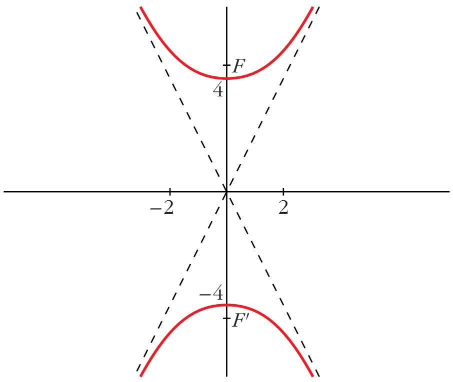
$\rightarrow \quad \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

Vértices: $(0, 4)$ y $(0, -4)$

Focos: $F(\sqrt{20}, 0)$ y $F'(-\sqrt{20}, 0)$

$exc = \dfrac{\sqrt{20}}{4} \approx 1{,}12$

Asíntotas: $y = 2x$; $y = -2x$



18 **Halla las ecuaciones de las hipérbolas determinadas de los modos siguientes:**

a) Focos (–4, 0), (4, 0). Distancia entre los vértices, 4.

b) Asíntotas, $y = \pm \dfrac{1}{5}x$. Vértice, (2, 0).

c) Asíntotas, $y = \pm 3x$. Pasa por el punto (2, 1).

d) Focos (–3, 0), (3, 0). Excentricidad, 3.

a) $c = 4$; $2a = 4 \quad \rightarrow \quad a = 2$; $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

b) $a = 2;\ \frac{b}{a} = \frac{1}{5} \ \rightarrow\ \frac{b}{2} = \frac{1}{5} \ \rightarrow\ b = \frac{2}{5}$

Ecuación: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4/25} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{4} - \frac{25y^2}{4} = 1$

c) $\frac{b}{a} = 3 \ \rightarrow\ b = 3a \ \rightarrow\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9a^2} = 1$

Como pasa por (2, 1) $\rightarrow\ \frac{4}{a^2} - \frac{1}{9a^2} = 1 \ \rightarrow\ 36 - 1 = 9a^2$

$35 = 9a^2 \ \rightarrow\ a^2 = \frac{35}{9} \ \rightarrow\ b^2 = 9a^2 = 35$

Ecuación: $\frac{x^2}{35/9} - \frac{y^2}{35} = 1$, o bien, $\frac{9x^2}{35} - \frac{y^2}{35} = 1$

d) $c = 3,\ \frac{c}{a} = \frac{3}{a} = 3 \ \rightarrow\ a = 1$

$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 1 = 8$

Ecuación: $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$

19 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a $F'(-4, 0)$ y $F(4, 0)$ es 6.**

Es una hipérbola de focos F y F' y constante $2a = 6$. Por tanto, $a = 3$, $c = 4$, $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$.

La ecuación es: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

20 **Halla la ecuación de la hipérbola que tiene el centro en el origen de coordenadas y los focos en el eje de abscisas, sabiendo que pasa por el punto $P(\sqrt{5/2}, 1)$ y que una de sus asíntotas es la recta $y = 2x$.**

La pendiente de la asíntota es $\frac{b}{a} = 2 \ \rightarrow\ b = 2a$

Luego $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = 1$ es la ecuación.

Como pasa por el punto $P(\sqrt{5/2}, 1)$, entonces:

$\frac{5/2}{a^2} - \frac{1}{4a^2} = 1 \ \rightarrow\ 10 - 1 = 4a^2 \ \rightarrow\ 9 = 4a^2 \ \rightarrow\ a^2 = \frac{9}{4} \ \rightarrow\ b^2 = 4a^2 = 9$

La ecuación será: $\frac{x^2}{9/4} - \frac{y^2}{9} = 1$, es decir: $\frac{4x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

Parábola

21 **Halla los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas, y represéntalas:**

a) $y^2 = 6x$ **b)** $y^2 = -6x$

c) $y = x^2$ **d)** $y = \frac{x^2}{4}$

e) $y^2 = 4(x-1)$ **f)** $(y-2)^2 = 8x$

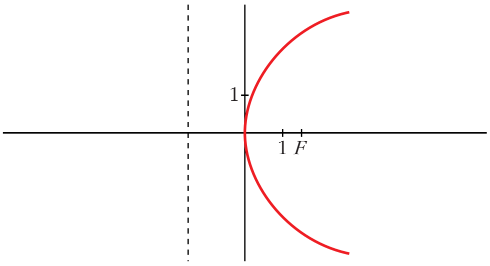
g) $x^2 = 4(y+1)$ **h)** $(x-2)^2 = -6y$

a) $\left.\begin{aligned} y^2 &= 2px \\ y^2 &= 6x \end{aligned}\right\} \ 2p = 6 \ \rightarrow \ p = 3 \ \rightarrow \ \frac{p}{2} = \frac{3}{2}$

Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

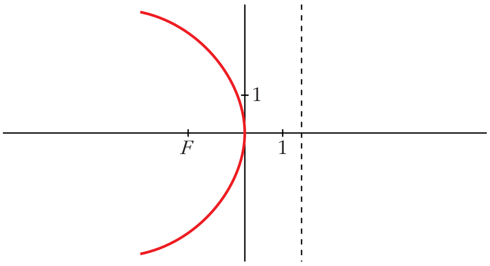
Directriz: $x = -\frac{3}{2}$



b) **Vértice:** (0, 0)

Foco: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

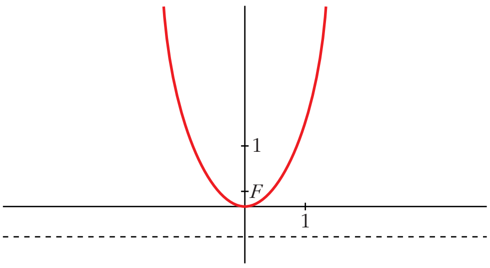
Directriz: $x = \frac{3}{2}$



c) **Vértice:** (0, 0)

Foco: $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

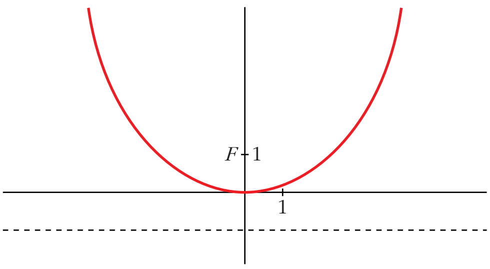
Directriz: $y = -\frac{1}{4}$



d) **Vértice:** (0, 0)

Foco: (0, 1)

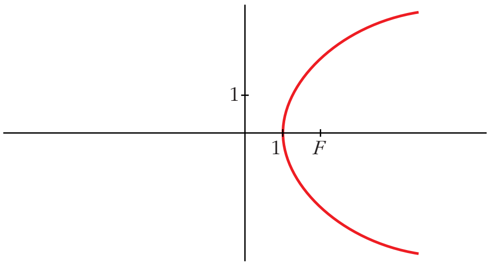
Directriz: $y = -1$



e) **Vértice:** (1, 0)

Foco: (2, 0)

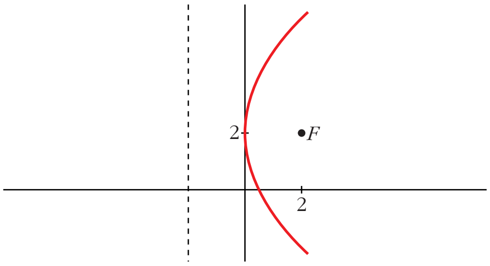
Directriz: $x = 0$



f) **Vértice:** (0, 2)

Foco: (2, 2)

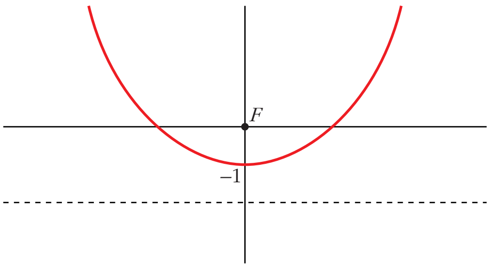
Directriz: $x = -2$



g) **Vértice:** (0, –1)

Foco: (0, 0)

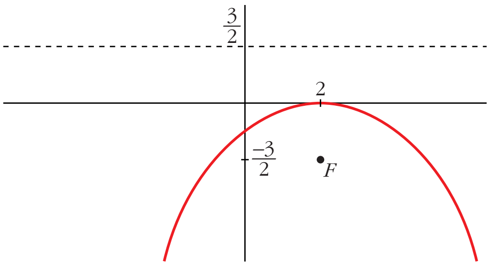
Directriz: $y = -2$



h) **Vértice:** (2, 0)

Foco: $\left(2, -\dfrac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = \dfrac{3}{2}$



22 **Halla las ecuaciones de las parábolas determinadas de los siguientes modos:**

a) Directriz, $x = -5$. Foco, (5, 0).

b) Directriz, $y = 3$. Vértice, (0, 0).

c) Vértice (0, 0) y pasa por (2, 3). (2 soluciones).

a) $\dfrac{p}{2} = 5 \;\rightarrow\; p = 10 \;\rightarrow\; 2p = 20$. Ecuación: $y^2 = 20x$

b) El foco será $F(0, -3)$. Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola y d: $y - 3 = 0$ es la directriz, entonces:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \;\rightarrow\; \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = |y - 3| \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 + \cancel{y^2} + 6y + \cancel{9} = \cancel{y^2} - 6y + \cancel{9} \;\rightarrow\; x^2 = -12y$$

c) Hay dos posibilidades:

I) *Eje horizontal*: $y^2 = 2px$. Como pasa por $(2, 3)$, entonces:

$$9 = 4p \;\rightarrow\; p = \frac{9}{4} \;\rightarrow\; y^2 = \frac{9}{2}x$$

II) *Eje vertical*: $x^2 = 2py$. Como pasa por $(2, 3)$, entonces:

$$4 = 6p \;\rightarrow\; p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; x^2 = \frac{4}{3}y$$

23 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $(3, 0)$ y de la recta $y = -3$.**

Es una parábola cuyo foco es $F(3, 0)$ y cuya directriz es $d: y + 3 = 0$. Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces:

$$\textit{dist}\,(P, F) = \textit{dist}\,(P, d) \;\rightarrow\; \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |y + 3| \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 - 6x + \cancel{9} + \cancel{y^2} = \cancel{y^2} + 6y + \cancel{9} \;\rightarrow\; y = \frac{x^2}{6} - x$$

O bien: $(x-3)^2 = 6\left(y + \dfrac{3}{2}\right)$

24 **Escribe la ecuación de la parábola de foco $F(2, 1)$ y directriz $y + 3 = 0$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, $F(2, 1)$ el foco, y $d: y + 3 = 0$ la directriz, entonces:

$$\textit{dist}\,(P, F) = \textit{dist}\,(P, d) \;\rightarrow\; \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = |y + 3| \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; (x-2)^2 + (y-1)^2 = (y+3)^2 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; (x-2)^2 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{y^2} + 6y + 9 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; (x-2)^2 = 8y + 8 \;\rightarrow\; (x-2)^2 = 8(y+1)$$

Esfera

25 **Di cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a esferas y di su centro y su radio:**

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

b) $2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

d) $x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xz - 4 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 3 = 0$

f) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 30 = 0$

g) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 6y - 3/2 = 0$

a) No tiene término en z^2. *No es una esfera*.

b) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego *no es una esfera*.

c) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 0 - (-8) = 9 \quad \rightarrow \quad \text{radio} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1,\ 0,\ 0)$$

d) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego *no es una esfera*.

e) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 1 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-1) = 6 \quad \rightarrow \quad \text{radio} = \sqrt{6}$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1,\ 0,\ 2)$$

f) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 10 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-10) = 15 \quad \rightarrow \quad \text{radio} = \sqrt{15}$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1,\ 0,\ 2)$$

g) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + \frac{9}{4} + 0 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 4 \quad \rightarrow \quad \text{radio} = 2$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = \left(-1, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

26 Halla la ecuación de las siguientes esferas:

a) Centro (1, 0, –5) y radio 1.

b) Diámetro $A(3, -4, 2)$, $B(5, 2, 0)$.

c) Centro (4, –2, 3) y tangente al plano $x - z = 0$.

d) Centro (3, –1, 2) y tangente al plano YZ.

a) $(x-1)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 1$, o bien, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10z + 25 = 0$

b) El centro es el punto medio de AB: $C = \left(\frac{3+5}{2}, -\frac{4+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (4, -1, 1)$

El radio es la distancia de C a uno de los puntos: $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

La ecuación es: $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z + 7 = 0$$

c) El radio es la distancia del centro $C(4, -2, 3)$ al plano π: $x - z = 0$:

$$r = dist\,(C, \pi) = \frac{|4-3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad r^2 = \frac{1}{2}$$

La ecuación será: $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \frac{1}{2}$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 6z + \frac{57}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x + 8y - 12z + 57 = 0$$

d) El plano YZ es el plano π: $x = 0$.

El radio es la distancia del centro $C(3, -1, 2)$ al plano π: $r = dist\,(C, \pi) = 3$

La ecuación será: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

27 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (2, –1, 4) es igual a 7.**

Es una esfera de centro (2, –1, 4) y radio 7:

$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 49$, o bien, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z - 28 = 0$

PARA RESOLVER

28 **Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:**

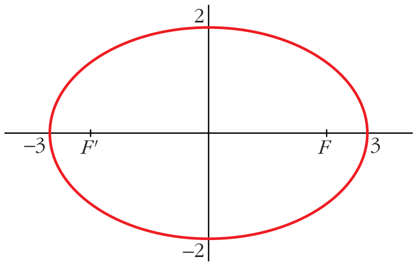
a) $4x^2 + 9y^2 = 36$ **b)** $16x^2 - 9y^2 = 144$ **c)** $9x^2 + 9y^2 = 25$

d) $x^2 - 4y^2 = 16$ **e)** $y^2 = 14x$ **f)** $25x^2 + 144y^2 = 900$

a) $4x^2 + 9y^2 = 36 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

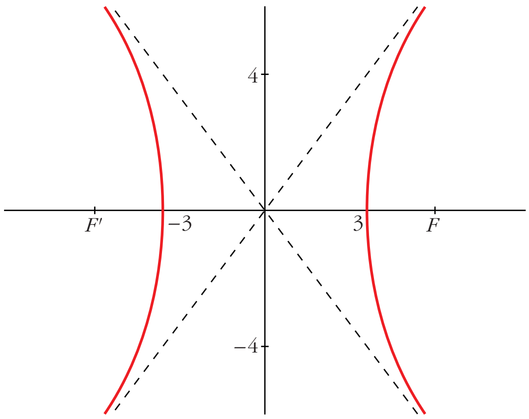
Es una elipse $\rightarrow$ $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$

$exc = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}75$



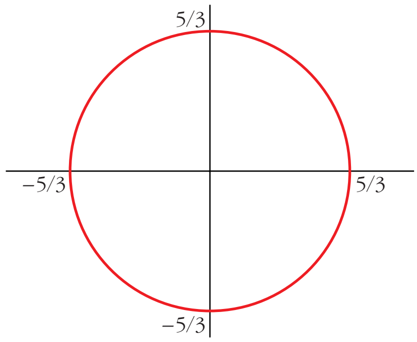
b) $16x^2 - 9y^2 = 144 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Es una hipérbola $\quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5; \quad exc = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67 \\ \text{Asíntotas:} \quad y = \dfrac{4}{3}x\,; \quad y = \dfrac{4}{3}x \end{cases}$



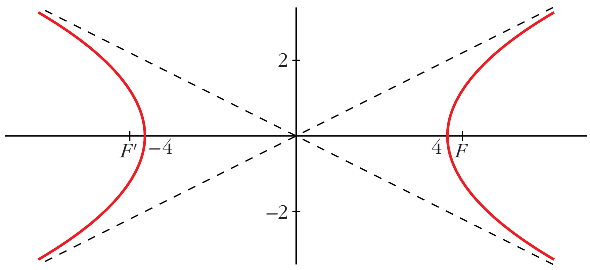
c) $9x^2 + 9y^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = \dfrac{25}{9}$

Es una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\dfrac{5}{3}$.



d) $x^2 - 4y^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Es una hipérbola $\quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 4, \quad b = 2, \quad c = 2\sqrt{5}; \quad exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12 \\ \text{Asíntotas:} \quad y = \dfrac{1}{2}x\,; \quad y = -\dfrac{1}{2}x \end{cases}$

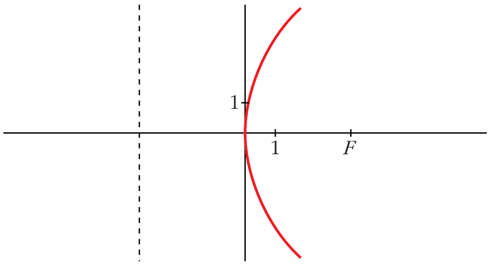


e) Es una parábola.

Vértice: (0, 0)

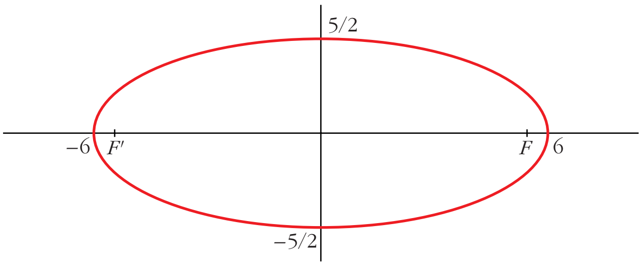
Foco: $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{7}{2}$



f) $25x^2 + 144y^2 = 900 \rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25/4} = 1$

Es una elipse $\rightarrow$ $a = 6$, $b = \frac{5}{2}$, $c = \frac{\sqrt{119}}{12}$; $exc = \frac{\sqrt{119}}{12} \approx 0{,}91$



Página 230

29 **Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:**

a) Centro (3, 5) y es tangente a la recta: $4x + 3y - 2 = 0$

b) Pasa por $A(0, 1)$ y $B(-1, 0)$ y su radio es $\sqrt{5}$.

c) Pasa por el origen de coordenadas y por los puntos $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$.

d) Tiene su centro en la recta $x - 3y = 0$ y pasa por los puntos $(-1, 4)$ y $(3, 6)$.

a) El radio de la circunferencia es la distancia del centro $C(3, 5)$ a la recta s: $4x + 3y - 2 = 0$:

$$r = dist\,(C, s) = \frac{|12 + 15 - 2|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{25}{5} = 5$$

La ecuación es: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$

b) El centro pertenece a la mediatriz del segmento AB:

— Pendiente de la recta que pasa por A y B $\rightarrow$ $m = \frac{0 - 1}{-1 - 0} = 1$

La mediatriz tiene pendiente $\frac{-1}{m} = \frac{-1}{1} = -1$.

— El punto medio de AB es $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

— La ecuación de la mediatriz es:

$$y = \frac{1}{2} - 1\left(x + \frac{1}{2}\right) \;\rightarrow\; y = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2} \;\rightarrow\; y = -x$$

— Un punto de la mediatriz es de la forma $P(x, -x)$.

Buscamos P tal que $dist\,(P, A) = dist\,(P, B) = \sqrt{5}$, es decir:

$$\sqrt{x^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{5} \;\rightarrow\; x^2 + x^2 + 1 + 2x = 5 \;\rightarrow\; 2x^2 + 2x - 4 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 + x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 1 \;\rightarrow\; y = -1 \\ x = -2 \;\rightarrow\; y = 2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- Centro $(1, -1) \;\rightarrow\; (x-1)^2 + (y+1)^2 = 5 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$
- Centro $(-2, 2) \;\rightarrow\; (x+2)^2 + (y-2)^2 = 5 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$

c) El centro pertenece a la mediatriz del segmento que une $O(0, 0)$ y $A(4, 0)$, es decir, pertenece a la recta $x = 2$.

También pertenece a la mediatriz del segmento que une $O(0, 0)$ y $B(0, 3)$, es decir, pertenece a la recta $y = \frac{3}{2}$.

Por tanto, el centro de la circunferencia es $C\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

El radio es la distancia del centro a cualquiera de los tres puntos:

$$r = dist\,(C, O) = |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

La ecuación es: $(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, o bien, $x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$

d) Si el centro está sobre la recta $x - 3y = 0$, es de la forma $C(3y, y)$.

El centro está a igual distancia de $A(-1, 4)$ que de $B(3, 6)$. Además, esta distancia es el radio, r, de la circunferencia:

$$r = dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \;\rightarrow\; |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \sqrt{(3y+1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(3y-3)^2 + (y-6)^2}$$

$$\cancel{9y^2} + 1 + 6y + \cancel{y^2} + 16 - 8y = \cancel{9y^2} + 9 - 18y + \cancel{y^2} + 36 - 12y$$

$$28y = 28 \;\rightarrow\; y = 1 \;\rightarrow\; x = 3y = 3$$

Por tanto, el centro de la circunferencia está en $C(3, 1)$, y su radio es:

$$r = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

La ecuación es: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

30 **S** **Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto (3, 1) y tiene sus focos en (4, 0) y (–4, 0).**

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

- Como pasa por (3, 1) $\longrightarrow$ $\dfrac{9}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$
- Como $a^2 = b^2 + c^2$ y sabemos que $c = 4$ $\longrightarrow$ $a^2 = b^2 + 16$

Teniendo en cuenta las dos condiciones anteriores:

$$\frac{9}{b^2+16} + \frac{1}{b^2} = 1 \longrightarrow 9b^2 + b^2 + 16 = b^4 + 16b^2 \longrightarrow b^4 + 6b^2 - 16 = 0$$

$$b^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} \begin{cases} b^2 = 2 \\ \cancel{b^2 = -8} \end{cases}$$

Así: $a^2 = 2 + 16 = 18$

Por tanto, la ecuación de la elipse será: $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

31 **Se llama hipérbola equilátera a aquella en que $a = b$. Halla la ecuación de la hipérbola equilátera cuyos focos son (5, 0) y (–5, 0).**

La ecuación será: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, y sabemos que $c = 5$ y que $a^2 = b^2$, entonces:

$$25 = 2a^2 \longrightarrow a^2 = \frac{25}{2}$$

Por tanto, la ecuación es: $\dfrac{x^2}{25/2} - \dfrac{y^2}{25/2} = 1$, o bien, $x^2 - y^2 = \dfrac{25}{2}$

32 **Halla la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son las rectas $y = \pm\dfrac{3}{5}x$ y los focos (2, 0) y (–2, 0).**

- Si los focos son (2, 0) y (–2, 0), entonces $c = 2$.
- Si las asíntotas son $y = \pm\dfrac{3}{5}x$, entonces: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{5}$
- Como $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos que $a^2 + b^2 = 4$.
- Teniendo en cuenta los dos últimos resultados:

$$\left.\begin{array}{l} b = \dfrac{3}{5}a \\ a^2 + b^2 = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2 + \dfrac{9}{25}a^2 = 4 \longrightarrow \dfrac{34a^2}{25} = 4 \longrightarrow 34a^2 = 100 \\ a^2 = \dfrac{100}{34} = \dfrac{50}{17} \longrightarrow b^2 = 4 - a^2 = \dfrac{18}{17} \end{array}$$

- Por tanto, la ecuación será: $\dfrac{x^2}{50/17} - \dfrac{y^2}{18/17} = 1$, o bien, $\dfrac{17x^2}{50} - \dfrac{17y^2}{18} = 1$

33 **S** **Una circunferencia del plano pasa por los puntos (1, 3) y (3, 5) y tiene el centro sobre la recta $x + 2y = 3$. Halla su centro y su radio.**

- Si el centro está sobre la recta $x + 2y = 3 \rightarrow x = 3 - 2y$; entonces es de la forma $C(3 - 2y, y)$.
- La distancia del centro a los dos puntos dados, $A(1, 3)$ y $B(3, 5)$ es la misma. Además, esta distancia es el radio, r, de la circunferencia:

$$r = dist\,(C, A) = dist\,(C, B) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \rightarrow$$

$$\rightarrow |(2 - 2y, y - 3)| = |(-2y, y - 5)| \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{(2 - 2y)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(-2y)^2 + (y - 5)^2}$$

$$4 + \cancel{4y^2} - 8y + \cancel{y^2} + 9 - 6y = \cancel{4y^2} + \cancel{y^2} + 25 - 10y$$

$$-4y = 12 \rightarrow y = -3 \rightarrow x = 3 - 2y = 9$$

- El *centro* de la circunferencia es $C(9, -3)$.
- El *radio* es: $r = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 = r$

34 **Halla las ecuaciones de las siguientes parábolas:**

a) Foco (0, 0); directriz $y = -2$.

b) Foco (2, 0); directriz $x = -1$.

c) Foco (1, 1); vértice $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

a) Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, debe cumplir: $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$; donde F es el foco y d la directriz.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |y + 2| \rightarrow x^2 + \cancel{y^2} = \cancel{y^2} + 4y + 4 \rightarrow x^2 = 4(y + 1)$$

b) Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$; siendo F el foco y d la directriz.

$$\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = |x + 1| \rightarrow \cancel{x^2} - 4x + 4 + y^2 = \cancel{x^2} + 2x + 1$$

$$y^2 = 6x - 3 \rightarrow y^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

c) Si el foco es $F(1, 1)$ y el vértice es $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, la directriz tiene que ser la recta d: $y = 0$, ya que la distancia del vértice al foco ha de ser igual a la distancia del vértice a la directriz. Así, si $P(x, y)$ es un punto de la parábola:

$dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = |y| \rightarrow (x - 1)^2 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{y^2}$$

$$(x - 1)^2 = 2y - 1 \rightarrow (x - 1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

35 **S** **a) Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(-1, 1)$ y es tangente a la recta $3x - 4y - 3 = 0$.**

b) De todas las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, encuentra las que sean tangentes a la circunferencia hallada en el apartado anterior.

a) El radio, r, de la circunferencia es la distancia del centro $C(-1, 1)$ a la recta $s: 3x - 4y - 3 = 0$; es decir:

$$r = dist\,(C, s) = \frac{|-3 - 4 - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$$

La ecuación será: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$, o bien, $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

b) Las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante son de la forma $y = x + k$, es decir, $t: x - y + k = 0$. La recta t es tangente a la circunferencia cuando la distancia del centro de la circunferencia, $C(-1, 1)$, a la recta es igual al radio, 2. Es decir:

$$dist\,(C, t) = \frac{|-1 - 1 + k|}{\sqrt{2}} = 2 \;\rightarrow\; \frac{|k - 2|}{\sqrt{2}} = 2 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; |k - 2| = 2\sqrt{2} \begin{cases} k - 2 = 2\sqrt{2} \;\rightarrow\; k = 2 + 2\sqrt{2} \\ k - 2 = -2\sqrt{2} \;\rightarrow\; k = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos rectas: $\begin{cases} y = x + 2 + 2\sqrt{2} \\ y = x + 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

36 **S** **Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(3, 2)$ y una de cuyas rectas tangentes tiene por ecuación: $4x - 3y - 5 = 0$.**

Determina si el punto $X(3, 3)$ es interior, es exterior o está en la circunferencia.

- El radio, r, de la circunferencia es igual a la distancia del centro, $C(3, 2)$, a la recta $s: 4x - 3y - 5 = 0$; es decir:

$$r = dist\,(C, s) = \frac{|12 - 6 - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{1}{5}$$

La ecuación es: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{25}$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 4y - \frac{324}{25} = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; 25x^2 + 25y^2 - 150x - 100y - 324 = 0$$

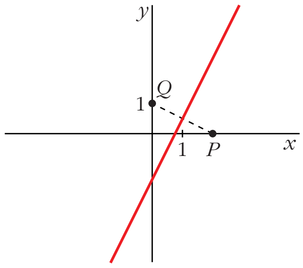
- Veamos si $X(3, 3)$ es interior, exterior o está en la circunferencia:

$$dist\,(C, X) = |\overrightarrow{CX}| = |(0, 1)| = 1 > \text{radio} = \frac{1}{5}$$

Luego el punto es *exterior* a la circunferencia.

37 **S** **a) Determina la ecuación que define el lugar geométrico de los puntos del plano que son centro de las circunferencias que pasan por los puntos $P(2, 0)$ y $Q(0, 1)$.**

b) Una circunferencia de longitud 3π, que contiene al origen de coordenadas, está centrada en uno de los puntos del lugar definido en a). Halla su centro.



a) Si $C(x, y)$ es el centro de la circunferencia, la distancia de C a P y a Q ha de ser la misma, es decir:

$$dist\,(C, P) = dist\,(C, Q) \ \rightarrow\ |\overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{QC}|$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y + 1 \ \rightarrow\ 4x - 2y - 3 = 0$$

Obtenemos una recta, que es la *mediatriz del segmento PQ*.

b) Longitud $= 2\pi r = 3\pi \ \rightarrow\ $ radio $= r = \dfrac{3}{2}$

Su centro está en un punto de la recta $4x - 2y - 3 = 0$ y pasa por el punto $P(0, 0)$.

El centro es de la forma $C\left(x, \dfrac{4x-3}{2}\right)$:

$$r = dist\,(P, C) = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4x-3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

$$x^2 + \frac{16x^2 - 24x + 9}{4} = \frac{9}{4} \ \rightarrow\ 4x^2 + 16x^2 + 9 - 24x = 9 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 20x^2 - 24x = 0 \ \rightarrow\ x(20x - 24) = 0 \begin{cases} x = 0 \ \rightarrow\ y = -\dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{6}{5} \ \rightarrow\ y = \dfrac{9}{10} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $C_1\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$ y $C_2\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{9}{10}\right)$

38 **S** **Halla la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos $F(-3, 0)$ y $F'(3, 0)$ y que pasa por el punto $P(8, 5\sqrt{3})$.**

- Hallamos la constante de la hipérbola: $|dist\,(P, F) - dist\,(P, F')| = 2a$

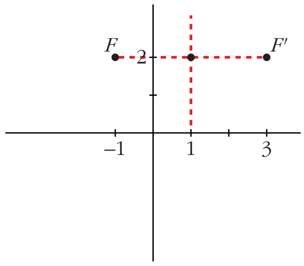
$$\left|\,|\overrightarrow{FP}| - |\overrightarrow{F'P}|\,\right| = 2a \ \rightarrow\ \left|\,|(11, 5\sqrt{3})| - |(5, 5\sqrt{3})|\,\right| = 2a$$

$$\sqrt{121 + 75} - \sqrt{25 + 75} = 2a \ \rightarrow\ 14 - 10 = 2a \ \rightarrow\ 4 = 2a \ \rightarrow\ a = 2$$

- Como $a = 2$ y $c = 3$, entonces $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$.

- La ecuación es: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

39 **S** **Calcula la ecuación de la elipse cuyo focos son los puntos $F(-1, 2)$ y $F'(3, 2)$ y cuya excentricidad es igual a 1/3.**

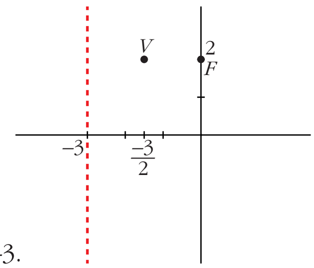


- El centro de la elipse es el punto medio entre los focos:

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (1, 2)$$

- La semidistancia focal es $c = 2$.
- La excentricidad es $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{3} \rightarrow a = 6$
- Obtenemos $b^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 4 = 32$
- La ecuación es: $\dfrac{(x-1)^2}{36} + \dfrac{(y-2)^2}{32} = 1$

40 **S** **La parábola de ecuación: $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$ tiene por foco el punto (0, 2). Encuentra su directriz.**



$$y^2 - 4y = 6x + 5 \rightarrow y^2 - 4y + 4 = 6x + 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow (y-2)^2 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

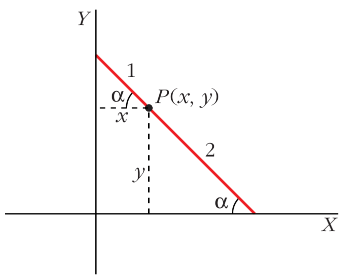
El vértice de la parábola es $V\left(-\dfrac{3}{2}, 2\right)$.

Como el foco es $F(0, 2)$, entonces la directriz es $x = -3$.

41 **S** **Un segmento de longitud 3 apoya sus extremos sobre los ejes de coordenadas tomando todas las posiciones posibles.**

a) Determina la ecuación del lugar geométrico del punto del segmento que está situado a distancia 1 del extremo que se apoya sobre el eje *OY*.

b) Identifica la cónica resultante.



a) Llamamos α al ángulo que forma el segmento con el eje X, como indica la figura. Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1\cos\alpha \\ y = 2sen\,\alpha \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^2 = cos^2\,\alpha \\ y^2 = 4sen^2\,\alpha \end{array}\right\}$$

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \rightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

b) Es una elipse con centro en el orgien y focos en el eje OY. Sus elementos son $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Focos $(0, \sqrt{3})$ y $(0, -\sqrt{3})$. Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$

42 **S** **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto (4, 0) es el doble de su distancia a la recta $x = 1$. Comprueba que dicho lugar geométrico es una cónica y halla sus focos.**

Sea $P(x, y)$ uno de los puntos del lugar geométrico. La distancia de P al punto $Q(4, 0)$ ha de ser el doble que la distancia de P a la recta $s: x - 1 = 0$; es decir:

$$dist(P, Q) = 2dist(P, s) \;\rightarrow\; \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2|x - 1|$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 4(x-1)^2 \;\rightarrow\; x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - \cancel{8x} + 16 + y^2 = 4x^2 - \cancel{8x} + 4 \;\rightarrow\; 3x^2 - y^2 = 12 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

Es una hipérbola, centrada en (0, 0).

$$a^2 = 4;\; b^2 = 12 \;\rightarrow\; c^2 = a^2 + b^2 = 16 \;\rightarrow\; c = 4$$

Por tanto, los focos son $F(4, 0)$ y $F(-4, 0)$.

Página 231

43 **Idea dos métodos diferentes que permitan decidir si la recta: $4x + 3y - 8 = 0$ es exterior, tangente o secante a la circunferencia: $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Razona tu respuesta.**

- Primer método:
  - Hallamos la distancia del centro de la circunferencia $C(6, 3)$ a la recta dada $s: 4x + 3y - 8 = 0$:

$$d = dist\,(C, s) = \frac{|24 + 9 - 8|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{25}{5} = 5$$

  - Como esta distancia es igual al radio de la circunferencia, $d = r = 5$, entonces, *la recta es tangente a la circunferencia.*

- Segundo método:
  - Obtenemos los puntos de intersección de la recta y la circunferencia, resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y - 8 = 0 \\ (x-6)^2 + (y-3)^2 = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{8 - 4x}{3} \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = 25 \end{array}$$

$$x^2 - 12x + 36 + \left(\frac{8 - 4x}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{8 - 4x}{3}\right) + 9 = 25$$

$$x^2 - 12x + 36 + \frac{64 - 64x + 16x^2}{9} - 16 + 8x + 9 = 25$$

$$9x^2 - 108x + 324 + 64 - 64x + 16x^2 - 144 + 72x + 81 = 225$$

$$25x^2 - 100x + 100 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 4 = 0 \;\rightarrow\; (x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2 \;\rightarrow\; y = \frac{8 - 4x}{3} = 0 \;\rightarrow\; \text{Se cortan en } (2, 0).$$

Como solo se cortan en un punto, *la recta es tangente a la circunferencia.*

44 **S** **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (4, 0) es igual a la mitad de la distancia a la recta: $x - 16 = 0$. Representa la curva que obtienes.**

Sea $P(x, y)$ uno de los puntos del lugar geométrico. La distancia de P a (4, 0) ha de ser igual a la mitad de la distancia de P a la recta $x - 16 = 0$; es decir:

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \frac{1}{2}\,|x - 16|$$

$$(x-4)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x-16)^2$$

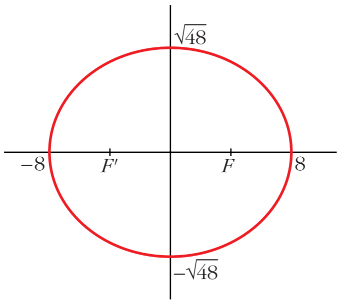
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 - 32x + 256)$$

$$4x^2 - \cancel{32x} + 64 + 4y^2 = x^2 - \cancel{32x} + 256$$

$$3x^2 + 4y^2 = 192 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

Es una elipse, en la que $a = 8$ y $b = \sqrt{48} \approx 6{,}93$.

La representamos:



Los focos están en $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$.

La excentricidad es: $exc = \frac{c}{a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

45 **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que el producto de las pendientes de las rectas trazadas desde P a los puntos: $A(-2, 1)$ y $B(2, -1)$ sea igual a 1. ¿Qué figura obtienes? Represéntala.**

- La pendiente de la recta que une P con A es: $\dfrac{y-1}{x+2}$
- La pendiente de la recta que une P con B es: $\dfrac{y+1}{x-2}$
- El producto de las pendientes ha de ser igual a 1, es decir:

$$\left(\frac{y-1}{x+2}\right) \cdot \left(\frac{y+1}{x-2}\right) = 1 \;\rightarrow\; \frac{y^2-1}{x^2-4} = 1 \;\rightarrow\; y^2 - 1 = x^2 - 4$$

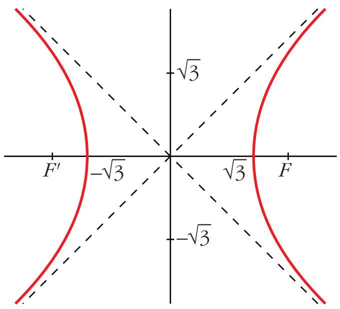
$$x^2 - y^2 = 3 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$$

Es una hipérbola, en la que $a = b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{6}$.

Los focos son $F(\sqrt{6}, 0)$ y $F(-\sqrt{6}, 0)$.

Las asíntotas son: $y = x$ e $y = -x$

La excentricidad es: $exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$



46 **Describe las siguientes cónicas. Obtén sus elementos y dibújalas.**

a) $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$ **b)** $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{25} = 1$

c) $\dfrac{(x-3)^2}{16} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$ **d)** $\dfrac{(y+2)^2}{4} - \dfrac{(x-3)^2}{16} = 1$

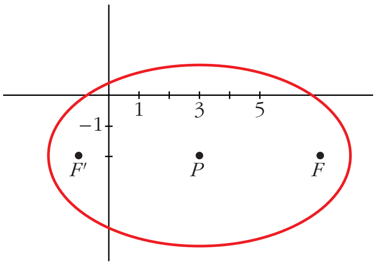
a) Es una elipse de centro $P(3, -2)$.

$a = 5$, $b = 3$,

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$.

Los focos son $F(7, -2)$ y $F'(-1, -2)$.

La excentricidad es: $exc = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

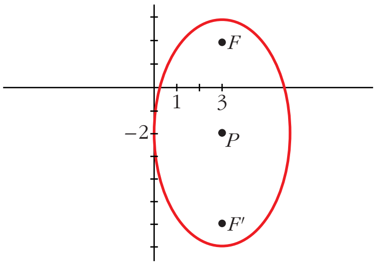


b) Es una elipse de centro $P(3, -2)$.

$a = 5$, $b = 3$, $c = 4$.

Los focos son $F(3, 2)$ y $F'(3, -6)$.

La excentricidad es: $exc = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$



c) Es una hipérbola de centro $P(3, -2)$.

$a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

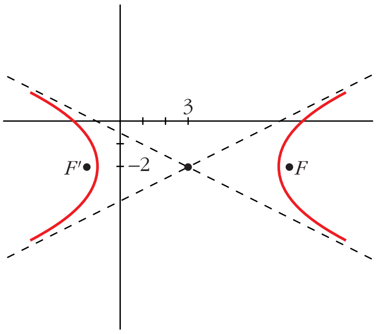
Los focos son:

$F(3 + 2\sqrt{5}, -2)$ y $F'(3 - 2\sqrt{5}, -2)$

La excentricidad es: $exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

Las asíntotas son:

$y + 2 = \dfrac{1}{2}(x-3)$; $y + 2 = -\dfrac{1}{2}(x-3)$



d) Es una hipérbola de centro $P(3, -2)$.

$b = 2$, $a = 4$, $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

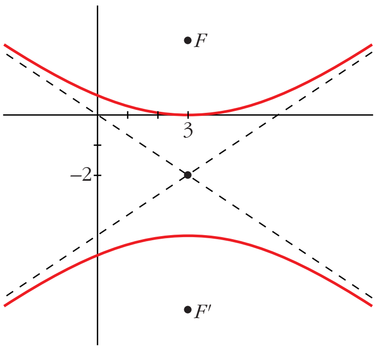
Los focos son:

$F(3, -2 + 2\sqrt{5})$ y $F'(3, -2 - 2\sqrt{5})$

La excentricidad es: $exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

Las asíntotas son:

$y + 2 = \dfrac{1}{2}(x-3)$; $y + 2 = -\dfrac{1}{2}(x-3)$

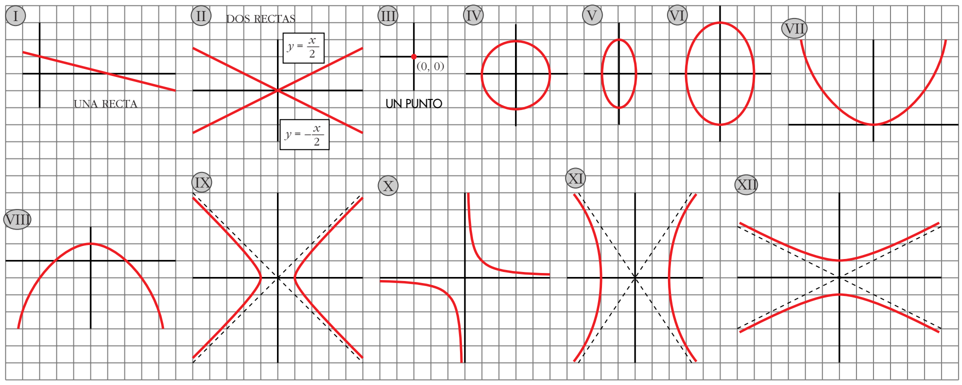


47 **Asocia cada una de las siguientes ecuaciones a una de las gráficas que se dan a continuación:**

a) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ b) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ c) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ d) $\dfrac{x}{4} + y = 1$

e) $\dfrac{x^2}{4} + y = 1$ f) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ g) $y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1$ h) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 0$

i) $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 0$ j) $\dfrac{x^2}{4} - y = 0$ k) $x^2 - y^2 = 1$ l) $xy = 1$



a) VI b) V c) IV d) I e) VIII f) XI

g) XII h) III i) II j) VII k) IX l) X

Página 232

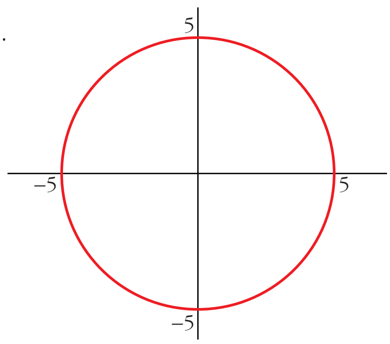
48 **Describe las siguientes curvas, identifica sus elementos y represéntalas.**

a) $\begin{cases} x = 5 \cos \alpha \\ y = 5 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 + 2 \cos \alpha \\ y = -2 + 3 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -3 + 3 \cos \alpha \\ y = 2 + 3 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = -1 + \cos \alpha \\ y = -3 + \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = (\cos \alpha)/2 \\ y = (\operatorname{sen} \alpha)/2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = (3 \operatorname{sen} \alpha)/2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \alpha \\ y = 2 + 5 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = -4 + 4 \cos \alpha \\ y = 2 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$

a) Es una circunferencia de centro (0, 0) y radio 5.

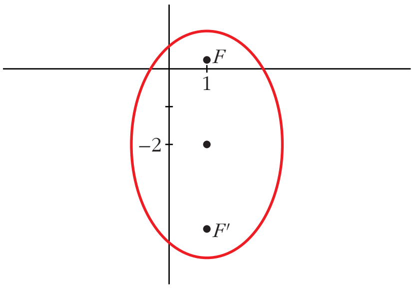


b) Es una elipse de centro (1, –2) y semiejes 2 y 3.

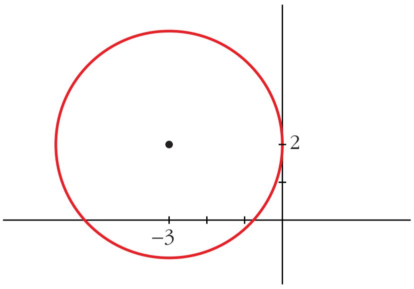
$a = 3, \;\; b = 2, \;\; c = \sqrt{5}.$

Focos: $F(1, -2 + \sqrt{5})$ y $F'(1, -2 - \sqrt{5})$

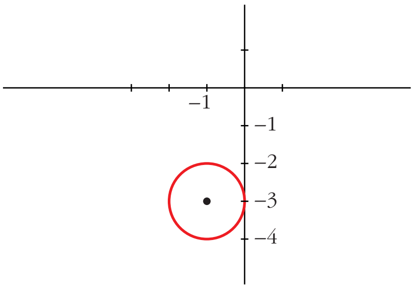
Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}75$



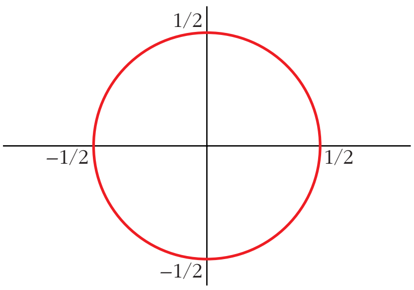
c) Es una circunferencia de centro (–3, 2) y radio 3.



d) Es una circunferencia de centro (–1, –3) y radio 1.



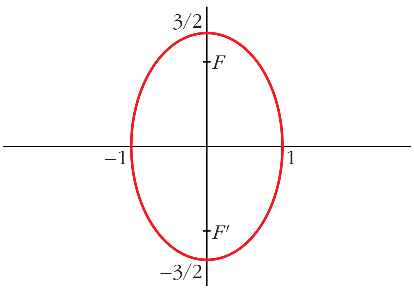
e) Es una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\dfrac{1}{2}$.



f) Es una elipse de centro (0, 0) y semiejes 1 y $\dfrac{3}{2}$. $a = \dfrac{3}{2}, \;\; b = 1, \;\; c = \dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

Focos: $F\left(0, \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ y $F'\left(0, -\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{5}/2}{3/2} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}75$

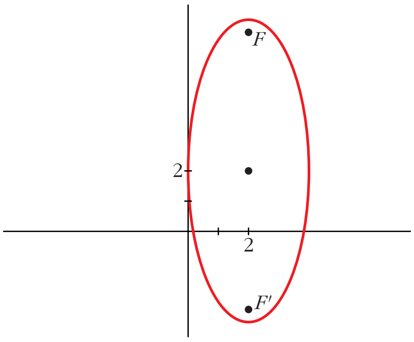


g) Es una elipse de centro (2, 2) y semiejes 2 y 5.

$a = 5, \quad b = 2, \quad c = \sqrt{21}.$

Focos: $F(2, 2 + \sqrt{21})$ y $F'(2, 2 - \sqrt{21})$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{21}}{5} \approx 0{,}92$

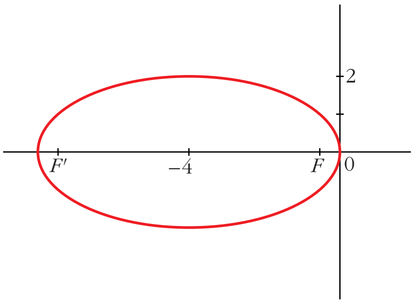


h) Es una elipse de centro (–4, 0) y semiejes 4 y 2.

$a = 4, \quad b = 2, \quad c = \sqrt{12}.$

Focos: $F(-4 + \sqrt{12}, 0)$ y $F'(-4 - \sqrt{12}\ 0)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{12}}{4} \approx 0{,}87$



49 **S** **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que equidistan de los puntos $A(1, -1, 0)$ y $B(2, 3, -4)$. Comprueba que obtienes un plano perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto medio de AB.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico: $dist\,(P, A) = dist\,(P, B) \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2}$

$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} + 2y + 1 + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 6y + 9 + \cancel{z^2} + 8z + 16$

π: $2x + 8y - 8z - 27 = 0 \rightarrow$ Ecuación de un plano.

- Veamos que π es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$:

  $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -4)$

  Vector normal al plano $\rightarrow \vec{n}(2, 8, -8) \,//\, \overrightarrow{AB}$

  Luego $\overrightarrow{AB} \perp \pi$.

- Comprobamos que π pasa por el punto medio de AB:

  $M = \left(\dfrac{1+2}{2}, \dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{0-4}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, 1, -2\right)$

  $2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right) + 8 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) - 27 = 0 \rightarrow M \in \pi$

- El plano π es el *plano mediador del segmento* AB.

50 **S** **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos siguientes:**

$$\alpha: \ \mathbf{3x + y - 2z + 1 = 0}$$

$$\beta: \ \mathbf{x - 3y + 2z - 3 = 0}$$

☛ ***Hay dos soluciones. Son los planos bisectores del diedro que determinan*** α ***y*** β.

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$dist\,(P, \alpha) = dist\,(P, \beta) \ \rightarrow \ \frac{|3x + y - 2z + 1|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{|x - 3y + 2z - 3|}{\sqrt{1 + 9 + 4}}$$

$$|3x + y - 2z + 1| = |x - 3y + 2z - 3|$$

$$3x + y - 2z + 1 = x - 3y + 2z - 3 \ \rightarrow \ 2x + 4y - 4z + 4 = 0 \ \rightarrow \ x + 2y - 2z + 2 = 0$$
$$3x + y - 2z + 1 = -x + 3y - 2z + 3 \ \rightarrow \ 4x - 2y - 2 = 0 \ \rightarrow \ 2x - y - 1 = 0$$

Son los *planos bisectores del diedro que determinan* α *y* β.

51 **Halla las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x = y$ que distan 1 del plano $2x - y + 2z = 2$.**

Si P es un punto del plano $x = y$, entonces es de la forma $P(x, x, z)$. La distancia de P al plano dado ha de ser igual a 1, es decir:

$$\frac{|2x - x + 2z - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|x + 2z - 2|}{3} = 1$$

$$|x + 2z - 2| = 3 \begin{cases} x + 2z - 2 = 3 \ \rightarrow \ x + 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = -3 \ \rightarrow \ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas: $r: \begin{cases} x + 2z - 5 = 0 \\ x = y \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$

52 **S** **a) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones $3x - 4y + 5 = 0$ y $2x - 2y + z + 9 = 0$.**

b) ¿Qué puntos del eje OY equidistan de ambos planos?

a) Si $P(x, y, z)$ es uno de los puntos del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}}$$

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{3}$$

$$3|3x - 4y + 5| = 5|2x - 2y + z + 9|$$

$$9x - 12y + 15 = 10x - 10y + 5z + 45 \ \rightarrow \ x + 2y + 5z + 30 = 0$$
$$9x - 12y + 15 = -10x + 10y - 5z - 45 \ \rightarrow \ 19x - 22y + 5z + 60 = 0$$

Son los planos bisectores del diedro que determinan los dos planos dados.

b) Un punto del eje OY es de la forma $Q(0, y, 0)$. La distancia de Q a cada uno de los planos ha de ser la misma, es decir:

$$\frac{|-4y+5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-2y+9|}{\sqrt{4+4+1}} \rightarrow \frac{|-4y+5|}{5} = \frac{|-2y+9|}{3}$$

$$3|-4y+5| = 5|-2y+9|$$

$$\begin{cases} -12y+15 = -10y+45 \rightarrow -2y = 30 \rightarrow y = -15 \\ -12y+15 = 10y-45 \rightarrow -22y = -60 \rightarrow y = \dfrac{30}{11} \end{cases}$$

Hay dos puntos: $Q_1(0, -15, 0)$ y $Q_2\left(0, \frac{30}{11}, 0\right)$

53 S **Calcula el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a igual distancia de $P(-1, 2, 5)$ y $Q(-3, 4, 1)$. ¿A qué distancia se encuentra el punto P de dicho conjunto?**

Si $A(x, y, z)$ es un punto del conjunto, su distancia a P y a Q ha de ser la misma, es decir: $dist\ (A, P) = dist\ (A, Q) \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-5)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2}$$

$$\cancel{x^2}+2x+1+\cancel{y^2}-4y+4+\cancel{z^2}-10z+25 =$$

$$= \cancel{x^2}+6x+9+\cancel{y^2}-8y+16+\cancel{z^2}-2z+1 \rightarrow -4x+4y-8z+4=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi: x-y+2z-1=0$$

Es el *plano mediador* del segmento que une P y Q.

La distancia de P a dicho plano será igual a la mitad de la distancia entre P y Q:

$$dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-2, 2, -4)| = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow dist\ (P, \pi) = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$$

54 **Halla la ecuación de la esfera que pasa por: $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 1)$, $C(1, 1, 2)$, $D(2, 1, 1)$.**

La ecuación es de la forma $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

Sustituimos cada uno de los cuatro puntos en la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 1+1+1+a+b+c+d=0 \rightarrow a+b+c+d=-3 \\ 1+4+1+a+2b+c+d=0 \rightarrow a+2b+c+d=-6 \\ 1+1+4+a+b+2c+d=0 \rightarrow a+b+2c+d=-6 \\ 4+1+1+2a+b+c+d=0 \rightarrow 2a+b+c+d=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=-3 \\ b=-3 \\ c=-3 \\ d=\ \ 6 \end{array}$$

La ecuación es: $x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$

55 **a) Halla la ecuación del plano perpendicular a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ en el punto $P(1, 2, 1)$.**

b) ¿Cuál es el punto diametralmente opuesto a P en la esfera dada?

a) El punto P es un punto de la esfera.

El centro de la esfera es $C(1, 2, 0)$.

El plano que buscamos pasa por P y es perpendicular al vector $\overrightarrow{CP}(0, 0, 1)$. Su ecuación es: $0 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 1) = 0$, es decir: $z - 1 = 0$.

b) Es el simétrico de P respecto del centro de la esfera. Si llamamos $P'(x, y, z)$ al punto que buscamos, C es el punto medio del segmento PP', es decir:

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{1+z}{2}\right) = (1, 2, 0) \;\rightarrow\; P'(1, 2, -1)$$

56 **Halla la ecuación de la esfera tangente a los planos $x - 2z - 8 = 0$ y $2x - z + 5 = 0$ y que tiene su centro en la recta:**

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

El centro de la esfera es de la forma $C(-2, 0, z)$ (pues pertenece a la recta r).

La distancia del centro a cada uno de los planos es la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$\frac{|-2 - 2z - 8|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|-4 - z + 5|}{\sqrt{4+1}} \;\rightarrow\; \frac{|-2z - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|-z + 1|}{\sqrt{5}}$$

$$|-2z - 10| = |-z + 1|$$

$$-2z - 10 = -z + 1 \;\rightarrow\; z = -11 \;\rightarrow\; C_1(-2, 0, -11)$$

$$-2z - 10 = z - 1 \;\rightarrow\; -3z = 9 \;\rightarrow\; z = -3 \;\rightarrow\; C_2(-2, 0, -3)$$

Hay dos soluciones:

1ª) $C_1(-2, 0, -11) \;\rightarrow\;$ Radio $= \dfrac{12}{\sqrt{5}}$

Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 11)^2 = \dfrac{144}{5}$

2ª) $C_2(-2, 0, -3) \;\rightarrow\;$ Radio $= \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \dfrac{16}{5}$

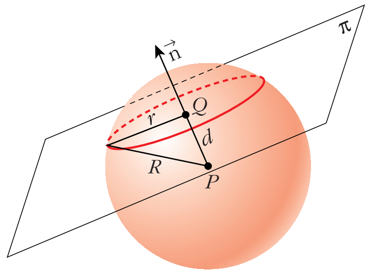
57 **La esfera $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ corta al plano $2x - 2y + z - 2 = 0$ en una circunferencia. Halla su centro y su radio.**

• Obtengamos el centro de la cicunferencia:

— El centro de la esfera es $P(3, -2, 1)$.

— La recta que pasa por P y es perpendicular al plano es:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$



— El punto de corte de esta recta con el plano dado es el centro de la circunferencia:

$2(3 + 2\lambda) - 2(-2 - 2\lambda) + (1 + \lambda) - 2 = 0$

$6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 1 + \lambda - 2 = 0 \;\rightarrow\; 9\lambda + 9 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -1$

$Q(1, 0, 0)$

• Calculamos el radio de la circunferencia:

La distancia entre los centros P y Q es:

$d = |\overrightarrow{QP}| = |(2, -2, 1)| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$

El radio de la esfera es $R = 5$.

Luego el radio de la circunferencia es: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

58 **a) Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(4, 1, -3)$ y $B(3, 2, 1)$ y que tiene su centro en la recta:**

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-1}$$

b) ¿Cuál es la ecuación del plano tangente en B a dicha esfera?

a) Escribimos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$$

Como el centro pertenece a esta recta, es de la forma $C(8 + 2\lambda, 3 + \lambda, -4 - \lambda)$

La distancia de C a los puntos A y B ha de ser la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \;\rightarrow\; |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$

$|(2\lambda + 4, \lambda + 2, -\lambda - 1)| = |(2\lambda + 5, \lambda + 1, -\lambda - 5)|$

$\sqrt{(2\lambda + 4)^2 + (\lambda + 2)^2 + (-\lambda - 1)^2} = \sqrt{(2\lambda + 5)^2 + (\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 5)^2}$

$\cancel{4\lambda^2} + 16 + 16\lambda + \cancel{\lambda^2} + 4 + 4\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda =$

$= \cancel{4\lambda^2} + 25 + 20\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda + \cancel{\lambda^2} + 25 + 10\lambda$

$-10\lambda = 30 \;\rightarrow\; \lambda = -3 \;\rightarrow\; C(2, 0, -1)$

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 3 =$ radio de la esfera.

La ecuación es: $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$$

b) Un vector normal al plano es $\overrightarrow{CB} = (1, 2, 2)$.

El plano pasa por $B(3, 2, 1)$. Su ecuación es:

$$1 \cdot (x-3) + 2 \cdot (y-2) + 2 \cdot (z-1) = 0$$

$$x - 3 + 2y - 4 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 2y + 2z - 9 = 0$$

59 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $A(-2, 3, 4)$ sea el doble de la distancia a $B(3, -1, -2)$.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, debe cumplir:

$dist\,(P, A) = 2dist\,(P, B)$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2}$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 = 2[x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 4z + 4]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 29 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x + 4y + 8z + 28$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 16x + 10y + 16z - 1 = 0$$

Es una esfera de centro $(8, -5, -8)$ y radio $\sqrt{154} \approx 12{,}4$.

60 **Dados $A(4, 2, 0)$ y $B(2, 6, -4)$, halla el lugar geométrico de los puntos P tales que $\overline{PA}$ sea perpendicular a $\overline{PB}$.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP}\,(x-4,\ y-2,\ z) \\ \overrightarrow{BP}\,(x-2,\ y-6,\ z+4) \end{array}\right\} \text{ han de ser perpendiculares, es decir:}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \ \rightarrow \ (x-4)(x-2) + (y-2)(y-6) + z(z+4) = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 + y^2 - 8y + 12 + z^2 + 4z = 0$$

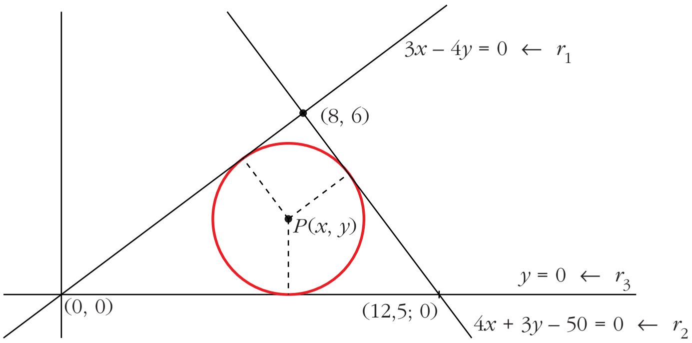
$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 20 = 0$$

Es una esfera de centro $(3, 4, -2)$ y radio 3.

PARA PROFUNDIZAR

61 **Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de lados:**

$$y = 0 \qquad 3x - 4y = 0 \qquad 4x + 3y - 50 = 0$$



Si $P(x, y)$ es el centro de la circunferencia, entonces:

• $dist\,(P, r_1) = dist\,(P, r_3) \;\rightarrow\; \dfrac{|3x - 4y|}{5} = |y| \;\rightarrow\; 5|y| = |3x - 4y|$

$5y = 3x - 4y \;\rightarrow\; 9y = 3x \;\rightarrow\; x = 3y$

$5y = -3x + 4y \;\rightarrow\; \cancel{y = -3x} \;\leftarrow$ No vale; la bisectriz que buscamos es la otra.

• $dist\,(P, r_2) = dist\,(P, r_3) \;\rightarrow\; \dfrac{|4x + 3y - 50|}{5} = |y| \;\rightarrow\; 5|y| = |4x + 3y - 50|$

$5y = 4x + 3y - 50 \;\rightarrow\; \cancel{y = 2x - 25} \;\leftarrow$ No vale; es la otra bisectriz.

$5y = -4x - 3y + 50 \;\rightarrow\; 2x + 4y = 25$

El punto de corte de las dos bisectrices es el incentro, es decir, el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ 2x + 4y = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6y + 4y = 25 \;\rightarrow\; 10y = 25 \;\rightarrow\; y = \dfrac{25}{10} = \dfrac{5}{2} \\ x = 3y = \dfrac{15}{2} \end{array}$$

El centro es $P\left(\dfrac{15}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

El radio es $dist\,(P, r_3) = y = \dfrac{5}{2} = \text{radio}$

La ecuación es: $\left(x - \dfrac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$; o bien:

$$x^2 - 15x + \frac{225}{4} + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$$

$$x^2 + y^2 - 15x - 5y + \frac{225}{4} = 0 \;\rightarrow\; 4x^2 + 4y^2 - 60x - 20y + 225 = 0$$

62 **Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por (–3, 2) y (4, 1) y es tangente al eje *OX*.**

Si $P(x, y)$ es el centro de la circunferencia, y llamamos a los puntos $A(-3, 2)$ y $B(4, 1)$; la distancia de P a los dos puntos y al eje OX ha de ser la misma. Además, esta distancia es igual al radio de la circunferencia.

$$\left.\begin{array}{l} dist\,[P, \text{eje } OX] = |y| \\ dist\,(P, A) = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} \\ dist\,(P, B) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} \end{array}\right\} \text{han de ser iguales.}$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$$

$$\cancel{x^2} + 6x + 9 + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} - 2y + 1$$

$$14x - 2y - 4 = 0 \quad \to \quad 7x - y - 2 = 0 \quad \to \quad y = 7x - 2$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = |y|$$

$$x^2 + 6x + 9 + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{y^2}$$

$$x^2 + 6x - 4(7x - 2) + 13 = 0$$

$$x^2 + 6x - 28x + 8 + 13 = 0 \quad \to \quad x^2 - 22x + 21 = 0$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 84}}{2} = \frac{22 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{22 \pm 20}{2} \begin{cases} x = 21 \ \to \ y = 145 \\ x = 1 \ \to \ y = 5 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

1ª) Centro (21, 145) y radio 145:

$$(x - 21)^2 + (y - 145)^2 = 21\,025; \ \text{ o bien: } \ x^2 + y^2 - 42x - 290y + 441 = 0$$

2ª) Centro (1, 5) y radio 5:

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 25; \ \text{ o bien: } \ x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$$

63 **Determina la ecuación de la circunferencia de radio 10 que, en el punto (7, 2), es tangente a la recta $3x - 4y - 13 = 0$.**

El centro pertenece a la recta perpendicular a la dada que pasa por (7, 2).

— Una recta perpendicular a $3x - 4y - 13 = 0$ es de la forma $4x + 3y + k = 0$. Como (7, 2) pertenece a la recta: $28 + 6 + k = 0 \ \to \ k = -34$. El centro pertenece a la recta:

$$4x + 3y - 34 = 0 \quad \to \quad y = \frac{-4x + 34}{3}$$

— El centro es $C\left(x, \dfrac{-4x + 34}{3}\right)$. La distancia de C al punto (7, 2) es igual al radio, que es 10, es decir:

$$\sqrt{(x - 7)^2 + \left(\frac{-4x + 34}{3} - 2\right)^2} = 10$$

$$(x-7)^2+\left(\frac{-4x+34}{3}\right)^2=100$$

$$x^2-14x+49+\frac{16x^2-224x+784}{9}=100$$

$$9x^2-126x+441+16x^2-224x+784=900$$

$$25x^2-350x+325=0 \;\rightarrow\; x^2-14x+13=0$$

$$x=\frac{14\pm\sqrt{196-52}}{2}=\frac{14\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{14\pm 12}{2} \begin{cases} x=13 \;\rightarrow\; y=-6 \\ x=\;\;1 \;\rightarrow\; y=10 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

1ª) Centro (13, –6) y radio 10:

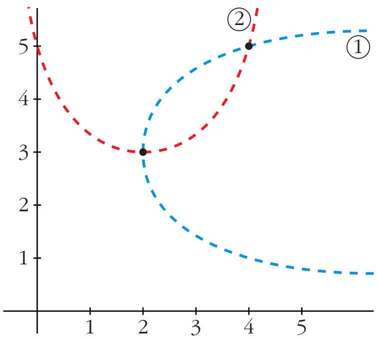
$$(x-13)^2+(y+6)^2=100 \;\rightarrow\; x^2+y^2-26x+12y+105=0$$

2ª) Centro (1, 10) y radio 10:

$$(x-1)^2+(y-10)^2=100 \;\rightarrow\; x^2+y^2-2x-20y+1=0$$

Página 233

64 Halla la ecuación de la parábola de vértice en el punto (2, 3) y que pasa por el punto (4, 5).



Hay dos posibilidades:

1) $(y-3)^2=2p(x-2)$

Como pasa por (4, 5) $\rightarrow$ $4=4p$ $\rightarrow$ $p=1$

$$(y-3)^2=2(x-2)$$

2) $(x-2)^2=2p'(y-3)$

Como pasa por (4, 5) $\rightarrow$ $4=4p'$ $\rightarrow$ $p'=1$

$$(x-2)^2=2(y-3)$$

65 Halla los vértices, los focos y la excentricidad de las cónicas siguientes:

a) $\mathbf{9x^2+16y^2-36x+96y+36=0}$ **b)** $\mathbf{x^2-4y^2-2x-3=0}$

a) $9x^2+16y^2-36x+96y+36=0$

$$9x^2-36x+36+16y^2+96y+144-36-144+36=0$$

$$(3x-6)^2+(4y+12)^2-144=0$$

$$[3(x-2)]^2+[4(y+3)]^2=144$$

$$9(x-2)^2+16(y+3)^2=144$$

$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$$

Es una **elipse** de **centro** (2, –3).

$a = 4, \quad b = 3, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$

Vértices: (6, –3); (–2, –3); (2, 0) y (2, –6)

Focos: $(2 + \sqrt{7}, -3)$ y $(2 - \sqrt{7}, -3)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}66$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 - 2x + 1 - 4y^2 - 1 - 3 = 0$

$(x - 1)^2 - 4y^2 = 4$

$\dfrac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1$

Es una **hipérbola** de **centro** (1, 0).

$a = 2, \quad b = 1, \quad c = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

Vértices: (3, 0) y (–1, 0)

Focos: $(\sqrt{5} + 1, 0)$ y $(-\sqrt{5} + 1, 0)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

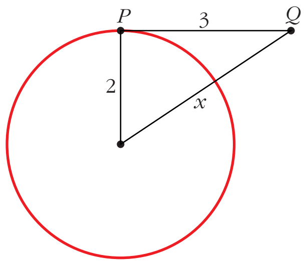
66 **Un segmento PQ de 3 cm de longitud se mueve apoyándose tangencialmente sobre la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.**

Si el extremo P es el punto de tangencia, ¿cuál es el lugar geométrico que describe el otro extremo Q?

La circunferencia dada tiene su centro en (2, –3) y su radio es $\sqrt{4 + 9 - 9} = 2$.

Como la tangente es perpendicular al radio, la distancia de Q al centro será siempre la misma:

$$x = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$



Por tanto, Q describe una circunferencia con el mismo centro que la dada y radio $\sqrt{13}$.

Su ecuación será: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$; o bien

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$$

67 **Pon la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidistan del punto $F(6, -1)$ y de la recta r: $3x - 4y - 2 = 0$.**

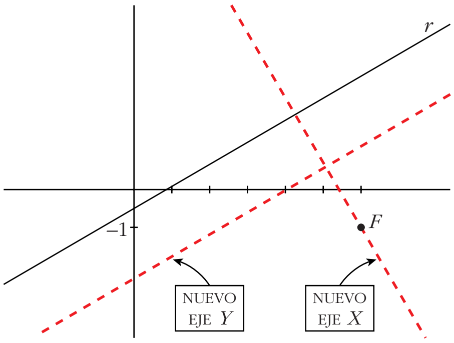
(Encontrarás una ecuación complicada. No te molestes en simplificarla). ¿De qué figura se trata? Para responder a esta pregunta, fíjate en cómo se ha definido y no en cuál es su ecuación.

Representa r y F. ¿Cómo tendremos que situar unos nuevos ejes coordenados para que la ecuación de esa curva sea $y^2 = kx$?

¿Cuánto vale k?

Ecuación: $\sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2} = \dfrac{|3x - 4y - 2|}{5}$

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto (foco) y de una recta (directriz) *es una parábola.*



La ecuación de la parábola respecto a los nuevos ejes es $y^2 = 2px$, donde p es la distancia del foco a la directriz:

$$dist\,(F, r) = \frac{|18 + 4 - 2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{20}{5} = 4$$

Si $p = 4$, entonces $k = 8$.

La ecuación es $y^2 = 8x$ respecto a los nuevos ejes.

68 **Demuestra que el lugar geométrico de los puntos P, cuyo cociente de distancias a un punto fijo F y a una recta fija d es igual a k, es una cónica de excentricidad k.**

☛ ***Toma como F el punto $(c, 0)$, como recta $x = \dfrac{a^2}{c}$ y como constante $k = \dfrac{c}{a}$, y estudia los casos $k < 1$, $k > 1$ y $k = 1$. ¿Qué cónica se obtiene en cada caso?***

$$\left.\begin{array}{l} F(c, 0) \\ d\colon x - \dfrac{a^2}{c} = 0 \\ P(x, y) \\ k = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{dist\,(P, F)}{dist\,(P, d)} = \dfrac{c}{a} \;\to\; dist\,(P, F) = \dfrac{c}{a} \cdot dist\,(P, d) \\[2ex] \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \dfrac{c}{a} \cdot \left| x - \dfrac{a^2}{c} \right| \end{array}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x^2 - \frac{2a^2}{c}x + \frac{a^4}{c^2}\right)$$

$$x^2 - \cancel{2cx} + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - \cancel{2cx} + a^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4$$

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

- Si $k < 1$, es decir, si $\dfrac{c}{a} < 1 \;\to\; c < a \;\to\; c^2 < a^2 \;\to\; a^2 - c^2 > 0$

  (c y a son positivos, pues k era un cociente de distancias).

En este caso, la ecuación corresponde a una *elipse*.

La excentricidad es $\dfrac{c}{a}$, es decir, k.

- Si $k > 1$, es decir, si $\dfrac{c}{a} > 1 \;\rightarrow\; c > a \;\rightarrow\; c^2 > a^2 \;\rightarrow\; a^2 - c^2 < 0$

En este caso, la ecuación corresponde a una *hipérbola*.

La excentricidad es $\dfrac{c}{a}$, es decir, k.

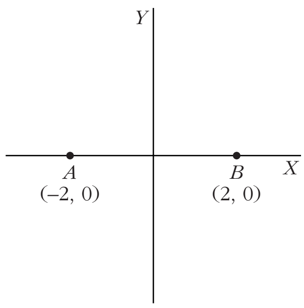
- Si $k = 1$, la distancia al punto es igual a la distancia a la recta, es decir, obtenemos una *parábola*.

69 **Dado un segmento AB de longitud 4, halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano que verifican: $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 18$**

☛ ***Toma como eje X la recta que contiene al segmento y como eje Y la mediatriz de AB.***

Tomamos como eje X la recta que contiene al segmento AB, y como eje Y, la mediatriz de AB.

Así, las coordenadas de A y B serían: $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$.



Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, debe cumplir: $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 18$; es decir:

$$2[(x + 2)^2 + y^2] + [(x - 2)^2 + y^2] = 18$$

$$2[x^2 + 4x + 4 + y^2] + [x^2 - 4x + 4 + y^2] = 18$$

$$2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = 18$$

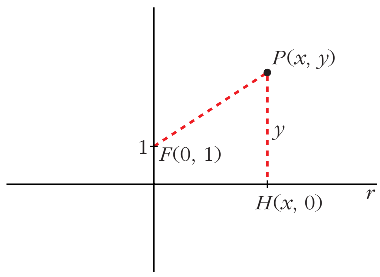
$$3x^2 + 3y^2 + 4x - 6 = 0$$

Esta ecuación corresponde a una circunferencia de centro $\left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)$ y radio $\dfrac{\sqrt{22}}{3}$.

70 **Sea r una recta y F un punto cuya distancia a r es 1. Llamemos H a la proyección de un punto cualquiera, P, sobre r. Halla el L. G. de los puntos que verifican: $\overline{PH} + \overline{PF} = 3$**

☛ ***Toma los ejes de modo que las coordenadas de F sean (0, 1).***

Tomamos los ejes de forma que el eje X coincida con la recta r, y el eje Y pase por F. Así, la recta r es $y = 0$ y $F(0, 1)$:



Si $P(x, y)$, entonces $H(x, 0)$.

Así, $\overline{PH} + \overline{PF} = 3$ queda:

$$|y| + \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 3$$

Operamos: $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 3 - |y|$

$$x^2 + (y-1)^2 = 9 + y^2 - 6|y|$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = 9 + \cancel{y^2} - 6|y|$$

$$x^2 - 2y + 1 - 9 = -6|y|$$

$$6|y| = 2y + 8 - x^2 \begin{cases} 6y = 2y + 8 - x^2 \;\rightarrow\; 4y = 8 - x^2 \;\rightarrow\; y = 2 - \dfrac{x^2}{4} \\ -6y = 2y + 8 - x^2 \;\rightarrow\; -8y = 8 - x^2 \;\rightarrow\; y = \dfrac{x^2}{8} - 1 \end{cases}$$

Obtenemos dos *parábolas*.

71 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a (2, 0, 0) y (–2, 0, 0) sea igual a 6.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cancel{x^2} - 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} = 36 + \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} - 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 8x + 36$$

$$3\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 2x + 9$$

$$9[x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2] = 4x^2 + 36x + 81$$

$$9x^2 + \cancel{36x} + 36 + 9y^2 + 9z^2 = 4x^2 + \cancel{36x} + 81$$

$$5x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 45$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5} = 1$$

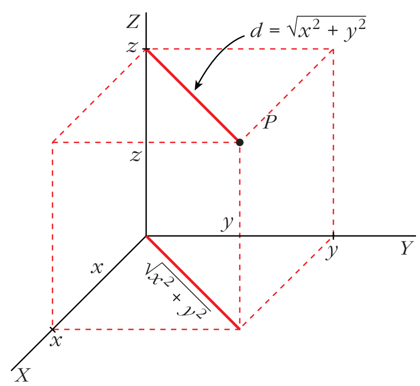
Es un *elipsoide*.

72 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de (1, –2, 3) y del eje *Z*.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, la distancia de P al eje Z debe ser igual a la distancia de P al punto dado $A(1, 2, -3)$, es decir:

$$\left.\begin{aligned} dist\,(P, \text{eje } Z) &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ dist\,(P, A) &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2} \end{aligned}\right\}$$

han de ser iguales.



$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2}$

$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 + z^2 + 6z + 9$

$z^2 = 2x + 4y - 6z - 14;$ o bien: $(z + 3)^2 = 2x + 4y - 5$

73 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a (0, 5, 0) y (0, –5, 0) es 4.

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$\left| \sqrt{x^2 + (y - 5)^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + (y + 5)^2 + z^2} \right| = 4$

$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = \pm 4$

$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$

$x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2 = 16 + x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2 \pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$

$\pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 20y + 16$

$\pm 2\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 5y + 4$

$4(x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2) = 25y^2 + 40y + 16$

$4x^2 + 4y^2 + \cancel{40y} + 100 + 4z^2 = 25y^2 + \cancel{40y} + 16$

$4x^2 - 21y^2 + 4z^2 = -84$

$-\dfrac{x^2}{21} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{21} = 1$

Es un *hiperboloide*.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

74 Dadas las rectas: $r: y = \dfrac{1}{2}x$, $s: y = -\dfrac{1}{2}x$ tomamos un segmento de longitud 4 uno de cuyos extremos esté en r y el otro en s. Queremos hallar el lugar geométrico de los puntos medios de dichos segmentos, para ello:

a) Expresa r y s en coordenadas paramétricas, utilizando un parámetro distinto para cada una.

b) Expresa un punto R de r y un punto S de s.

c) Obtén, mediante dos parámetros, la expresión del punto medio del segmento RS.

d) Expresa analíticamente la condición de que $dist(R, S) = 4$.

e) Relacionando las expresiones obtenidas en c) y en d), obtendrás la ecuación implícita del L. G. buscado: $x^2 + 16y^2 = 16$

f) Identifica el tipo de curva de que se trata.

a) $r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = -2\mu \\ y = \mu \end{cases}$

b) $R(2\lambda, \lambda) \in r$; $S(-2\mu, \mu) \in s$

c) Punto medio del segmento RS:

$$M = \left(\frac{2\lambda - 2\mu}{2}, \frac{\lambda + \mu}{2}\right) = \left(\lambda - \mu, \frac{\lambda + \mu}{2}\right), \text{ es decir:}$$

$$\begin{cases} x = \lambda - \mu \;\to\; \lambda = x + \mu \\ y = \dfrac{\lambda + \mu}{2} \;\to\; 2y = x + \mu + \mu \;\to\; 2y = x + 2\mu \;\to\; \mu = \dfrac{2y - x}{2} = y - \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$\lambda = x + y - \frac{x}{2} = y + \frac{x}{2} \;\to\; \lambda = y + \frac{x}{2}; \;\; \mu = y - \frac{x}{2}$$

d) $dist\,(R, S) = 4 \;\to\; |\overrightarrow{SR}| = 4$

$\overrightarrow{SR}(2\lambda + 2\mu, \mu - \lambda)$

$\sqrt{(2\lambda + 2\mu)^2 + (\mu - \lambda)^2} = 4$

$4\lambda^2 + 4\mu^2 + 8\lambda\mu + \mu^2 + \lambda^2 - 2\lambda\mu = 16$

$5\lambda^2 + 5\mu^2 + 6\lambda\mu = 16$

e) Utilizando lo obtenido en c) y d), tenemos que:

$$5\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + 5\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + 6\left(y + \frac{x}{2}\right)\left(y - \frac{x}{2}\right) = 16$$

$$5\left(y^2 + \frac{x^2}{4} + xy\right) + 5\left(y^2 + \frac{x^2}{4} - xy\right) + 6\left(y^2 - \frac{x^2}{4}\right) = 16$$

$$5y^2 + \frac{5x^2}{4} + \cancel{5xy} + 5y^2 + \frac{5x^2}{4} - \cancel{5xy} + 6y^2 - \frac{3x^2}{2} = 16$$

$x^2 + 16y^2 = 16$

f) $x^2 + 16y^2 = 16 \;\to\; \dfrac{x^2}{16} + y^2 = 1.$

Es una elipse, en la que $a = 4$, $b = 1$ y $c = \sqrt{15}$.

Focos: $(\sqrt{15}, 0)$ y $(-\sqrt{15}, 0)$. Excentricidad $= \dfrac{\sqrt{15}}{4} \approx 0{,}97$