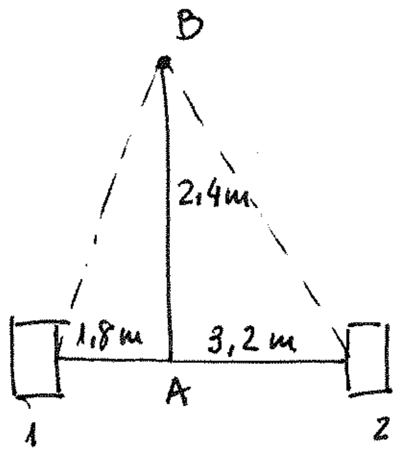
PROPIEDADES DE LAS ONDAS: Cuestiones y Problemas

1)



- Vibran coherentemente y en fase
- Interferencia destructiva: $f = 122\ Hz$
- ¿ v_s ?
- En (B) f para la interferencia destructiva.

ONDAS COHERENTES: "Están en fase o con una diferencia de fase constante.

EC. DE LA INTERFERENCIA

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = A \operatorname{sen}(\omega t - k x_1) \\ y_2 = A \operatorname{sen}(\omega t - k x_2) \end{array}\right\} \quad y = \underbrace{2A \cos k\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)}_{A_0} \operatorname{sen}\left(\omega t - k \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

$$A_0 = 2A \cos k\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$

a) $x_1 = 1,8\ m$; $x_2 = 3,2\ m$; $f = 122\ Hz$

Interferencia destructiva: $\cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) = 0$

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{3,2 - 1,8}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{2}\pi}{\lambda} \frac{1,4}{\cancel{2}} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 1,4}{2n+1} \Rightarrow \text{Para } n = 0 \Rightarrow \lambda = 2,8\ m$$

$$v_s = \lambda \cdot f = 2,8 \cdot 122 \Rightarrow \boxed{v_s = 341,6\ \frac{m}{s} \simeq 342\ \frac{m}{s}}$$

b) Según la figura en el pto. B.

$$r_{1B} = \sqrt{1{,}8^2 + 2{,}4^2} = 3$$

$$r_{2B} = \sqrt{3{,}2^2 + 2{,}4^2} = 4$$

Interferencia destructiva:

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{r_{2B} - r_{1B}}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{4-3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{2}\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2}{2n+1}} \Rightarrow \text{Para } n=0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2\,m}$$

$$v_s = \lambda f' \Rightarrow f' = \frac{v_s}{\lambda} = \frac{342}{2} \Rightarrow \boxed{f' = 171\ Hz}$$

---

2) No, si consideramos dos ondas coherentes de igual frecuencia y fase diferente:

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t - kx), \quad y_2 = A_2 \cos(\omega t - kx + \phi),$$

en cuyo caso las relaciones trigonométricas no resultan tan fácil como en los casos estudiados. Deberíamos ayudarnos del cálculo fasorial:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \text{FÓRMULA DE EULER}$$

En el caso anterior podemos considerar dos situaciones sencillas:

1. Interferencia constructiva: desfase nulo ($\phi = 0$)

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \cos(\omega t - kx) + A_2 \cos(\omega t - kx)$$

$$y = (A_1 + A_2)\cos(\omega t - kx) \Longrightarrow \boxed{A_r = A_1 + A_2}$$

2. Interferencia destructiva: oposición de fase ($\phi = \pi$)

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t - kx + \pi) = -A_2 \cos(\omega t - kx)$$

$$\left(\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha \right)$$

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t - kx)$$

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \cos(\omega t - kx) - A_2 \cos(\omega t - kx) = (A_1 - A_2)\cos(\omega t - kx)$$

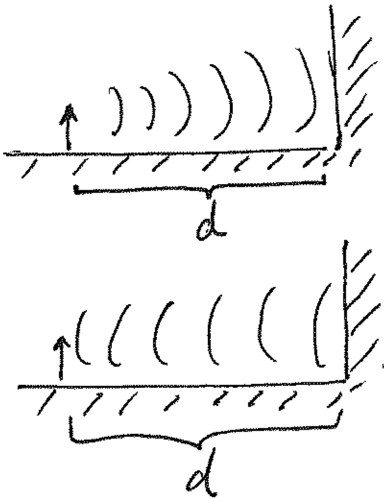
$$\boxed{A_r = A_1 - A_2}$$

3. En el caso general de dos ondas con amplitudes diferentes y fases arbitrarias, debemos hacer uso del cálculo fasorial (variable compleja), que no está dentro de nuestro curso, pero comentar, que la amplitud resultante nunca se cancelará, obteniendo una expresión de la forma:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi}$$

"Es decir, en ningún caso tendremos una interferencia DESTRUCTIVA COMPLETA"

3|



Dado que el sonido tendrá que recorrer la distancia (2d) para que llegue a nosotros de nuevo.

$v_S = 340\ m/s$

$t = 0{,}1\ s$

$$v_s = \frac{2d}{t} \Rightarrow d = \frac{1}{2} v_s t$$

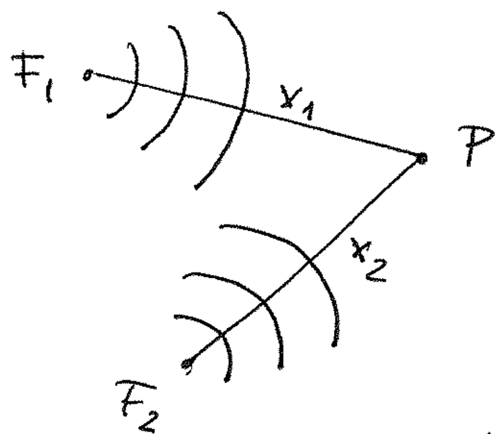
$$d = \frac{1}{2} \cdot 340 \frac{m}{\cancel{s}} \cdot 0{,}1\cancel{s} = 17m$$

$$\boxed{d = 17m}$$

4| Datos: $f = 100\ Hz$

$x_1 = 103{,}5m$; $x_2 = 100\ m$

$v_s = 340\ m/s$



Tendremos que estudiar si en el punto P obtenemos para los datos anteriores, una interferencia destructiva total, en cuyo caso el aparato no registrará ningún sonido. En cualquier otro caso sí quedará registrada la interferencia en ese punto.

Recordando la ecuación de la interferencia:

$$y = 2A\cos k\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \text{sen}\left(\omega t - k\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

para dos ondas del tipo:

$$y_1 = A\,\text{sen}(\omega t - kx_1)\,;\; y_2 = A\,\text{sen}(\omega t - kx_2)$$

La amplitud resultante: $A_0 = 2A\cos k\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$

La interferencia destructiva total se dará:

$$\cos k\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) = 0$$

Comprobaremos el valor de este factor con los datos aportados:

$$v_S = \lambda \cdot f \Rightarrow \underline{\lambda} = \frac{v_S}{f} = \frac{340\ m/s}{100\ s^{-1}} = \underline{3{,}4\ m}$$

$$\cos k\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) = \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) = \cos\frac{2\pi}{3{,}4}\left(\frac{103{,}5 - 100}{2}\right) =$$

$$= \cos\frac{\cancel{2}\pi}{3{,}4}\cdot\frac{3{,}5}{\cancel{2}} \simeq \cos\pi = \boxed{-1} \neq 0.$$ Por tanto

sí registrará sonido. Es más, con estos datos, registrará un sonido de amplitud máxima.

5| Datos: $y = 2\cos(3{,}14t)\,\text{sen}(1{,}256x)$ S.I.

Como indica el enunciado, nos encontramos con una onda estacionaria, superposición de dos ondas coherentes, de igual frecuencia y amplitud que viajan en la misma dirección, pero en sentido contrario.

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = A\,\text{sen}(\omega t - kx) \\ y_2 = A\,\text{sen}(\omega t + kx) \end{array}\right\} y = y_1 + y_2 = 2A\,\text{sen}\,kx\,\cos\omega t,$$

expresión de una onda estacionaria con un nodo en el origen (cuerda fija por los extremos)

Identificando los términos de la ecuación dada: $y = 2\,\text{sen}(1{,}256\,x)\cos(3{,}14\,t)$ (S.I.)

$$2A = 2 \Longrightarrow \boxed{A = 1\,m}$$

$$k = 1{,}256 \Longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = 1{,}256 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{1{,}256} = 5\,m}$$

$$\omega = 3{,}14 \Longrightarrow 2\pi f = 3{,}14 \Rightarrow \boxed{f = \frac{3{,}14}{2\pi} = 0{,}5\,Hz}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = \text{sen}\,(3{,}14\,t - 1{,}256\,x) \\ y_2 = \text{sen}\,(3{,}14\,t + 1{,}256\,x) \end{array}}$$

6] Datos: $d_n = 25\,cm$; $v_s = 340\ m/s$

Tomando para el sistema de ondas estacionarias la forma: $y = 2A \operatorname{sen} kx \cos \omega t$, los nodos vendrían determinados por:

$\operatorname{sen} kx_n = 0 \Rightarrow kx_n = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

Por tanto, la posición de los nodos será:

$$\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda} x_n = n\cancel{\pi} \Rightarrow \boxed{x_n = n\frac{\lambda}{2}} \quad n (= 0, 1, 2, \ldots)$$

La posición de dos nodos consecutivos:

$$\left. \begin{array}{l} x_n(n) = n\dfrac{\lambda}{2} \\ x_n(n+1) = (n+1)\dfrac{\lambda}{2} \end{array} \right\} d_n = x_n(n+1) - x_n(n) =$$

$$= (n+1)\frac{\lambda}{2} - n\frac{\lambda}{2} =$$

$$= \cancel{n\frac{\lambda}{2}} + \frac{\lambda}{2} - \cancel{n\frac{\lambda}{2}}$$

La distancia entre dos nodos consecutivos es:

$$d_n = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = 0{,}25\,m \Rightarrow \boxed{\lambda = 0{,}5\,m}$$

$$v_s = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v_s}{\lambda} = \frac{340\ m/s}{0{,}5\ m} \Rightarrow \boxed{f = 680\ Hz}$$

7] Datos: $y = 5{,}0 \,\text{sen}\, \frac{\pi x}{3} \cos 40\pi t$ (CGS)

a) ¿ A, v_p (veloc. propagación) ?

Identificando con $y = 2A \,\text{sen}\, kx \cos\omega t$

$$2A = 5{,}0 \Rightarrow A = \frac{5{,}0}{2} \Rightarrow \boxed{A = 2{,}5 \text{ cm}}$$

$$k = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\lambda = 6 \text{ cm}}$$

$$\omega = 40\pi \Rightarrow 2\pi f = 40\pi \Rightarrow \boxed{f = 20 \text{ Hz}}$$

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 6 \cdot 20 \Rightarrow \boxed{v_p = 120 \text{ cm/s}}$$

$$\boxed{v_p = 1{,}2 \text{ m/s}}$$

b) $\text{sen}\, \frac{\pi x}{3} = 0 \Rightarrow$ POSICIÓN DE LOS NODOS

Como en el ejercicio anterior: $x_n = n\frac{\lambda}{2}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

y la distancia entre dos nodos consecutivos:

$$d_n = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d_n = \frac{6}{2} \Rightarrow \boxed{d_n = 3 \text{ cm}}$$

c) v (vibración) de una partícula ($x = 1{,}5$ m; $t = 1{,}25$ s)

$$y = 5{,}0 \,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot 150\right) \cos(40\pi \cdot 1{,}25) = 5{,}0 \cancelto{0}{\text{sen}(50\pi)} \cdot \cos(40\pi \cdot 1{,}25)$$

$$\boxed{y = 0}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -5{,}0 \cdot 40\pi \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3} \operatorname{sen} 40\pi t =$$

$$= -200\pi \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3} \operatorname{sen} 40\pi t$$

$$v\,(1{,}5\,m\,;\,1{,}25\,s) = -200\pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1{,}50\right)^{\nearrow 0} \operatorname{sen}(40\pi \cdot 1{,}25)$$

$$\boxed{v = 0\ m/s}$$

8) Datos:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \operatorname{sen}(1000t - 100x) \\ y_2 &= \operatorname{sen}(1000t + 100x) \end{aligned}\right\}$$ Supongamos que la unidades se encuentran en (S.I.)

$$y = y_1 + y_2 = \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= 1000t - 100x \\ B &= 1000t + 100x \end{aligned}\right\} \quad \frac{A+B}{2} = 1000\,t \ ; \quad \frac{A-B}{2} = -100x$$

$$y = 2 \cos(-100x) \operatorname{sen}(1000t) \Rightarrow (\cos(-\alpha) = \cos\alpha)$$

$$\boxed{y = 2 \cos(100x) \operatorname{sen}(1000t)}$$

El resultado de la superposición de esas dos ondas es una ONDA ESTACIONARIA de amplitud:

$$\boxed{A_r = 2 \cos(100x)}$$

La amplitud máxima para los vientres se obtiene cuando:

$$\cos(100x) = \pm 1$$, y dicha amplitud será:

$$\boxed{A_{0_{máx}} = 2\,m}$$

Los vientres se encuentran para:

$$100x_v = n\pi \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$\boxed{x_v = n\frac{\pi}{100} \quad (n=0,1,2,\ldots)}$$

La distancia entre dos vientres consecutivos:

$$\left.\begin{array}{l} x_v(n) = n\dfrac{\pi}{100} \\ x_v(n+1) = (n+1)\dfrac{\pi}{100} \end{array}\right\} \begin{array}{l} d_v = x_v(n+1) - x_v(n) = (n+1)\dfrac{\pi}{100} - n\dfrac{\pi}{100} \\ d_v = \cancel{n\dfrac{\pi}{100}} + \dfrac{\pi}{100} - \cancel{n\dfrac{\pi}{100}} \Rightarrow \boxed{d_v = \dfrac{\pi}{100}\,m} \end{array}$$

En general para una onda estacionaria de la forma:

$y = A\cos kx \,\text{sen}\,\omega t$, los vientres se encuentran para:

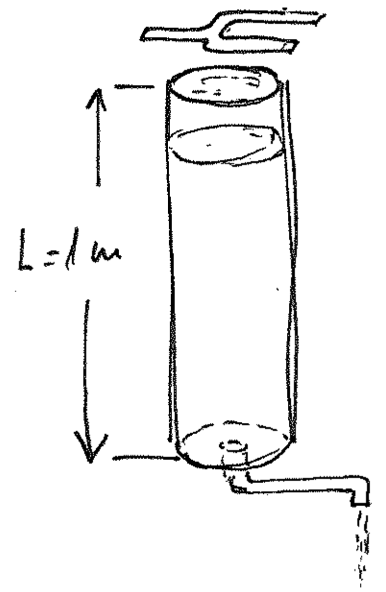
$$\cos kx = \pm 1 \Rightarrow kx_v = n\pi \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x_v = n\pi \Rightarrow \boxed{x_v = n\frac{\lambda}{2};\ (n=0,1,2,\ldots)}$$

La distancia entre dos vientres consecutivos es:

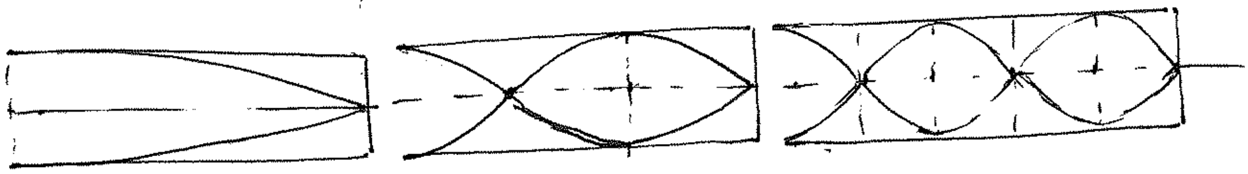
$$\left.\begin{array}{l} x_v(n) = n\dfrac{\lambda}{2} \\ x_v(n+1) = (n+1)\dfrac{\lambda}{2} \end{array}\right\} d_v = x_v(n+1) - x_v(n) = (n+1)\frac{\lambda}{2} - n\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \boxed{d_v = \frac{\lambda}{2}}$$

9] El experimento utilizado para calcular estos niveles sería algo parecido a esto:



Sería un caso de un tubo SEMICERRADO. En estos tipos de tubos, la longitud (L) para que se produzcan ondas estacionarias vienen dada por:

$$L=(2n-1)\frac{\lambda}{4}\ ;\ n=1,2,\dots$$

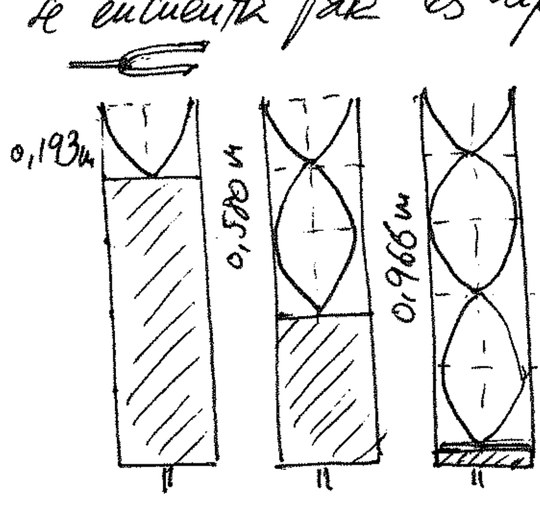


$\boxed{f=440\ Hz}$. Teniendo en cuenta que la velocidad de sonido en el aire es: $v_s=340\ m/s$

$$v_s=\lambda\cdot f \Rightarrow \lambda=\frac{v_s}{f}=\frac{340\ m/s}{440\ s^{-1}}=0{,}773\ m$$

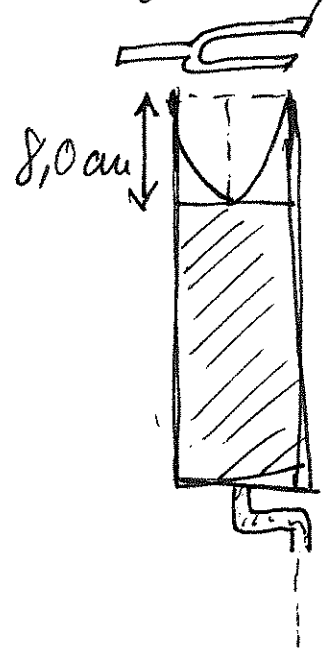
Las diferentes longitudes para las que se produce resonancia (ondas estacionarias) se encuentra para los diferentes valores de n.

$$n=1 \Rightarrow L_1=\frac{\lambda}{4}=\frac{0{,}773}{4}=0{,}193\ m$$
$$n=2 \Rightarrow L_2=3\frac{\lambda}{4}=\dots=0{,}580\ m$$
$$n=3 \Rightarrow L_3=5\frac{\lambda}{4}=\dots=0{,}966\ m$$



10 Datos: $f = 1000\,Hz$; $L_1 = 8{,}0\,cm = 0{,}08\,m$

Tenemos el mismo caso que hemos estudiado en el ejercicio anterior. Un tubo semicerrado. Como dijimos la longitud para que se produzca resonancia viene dada por:



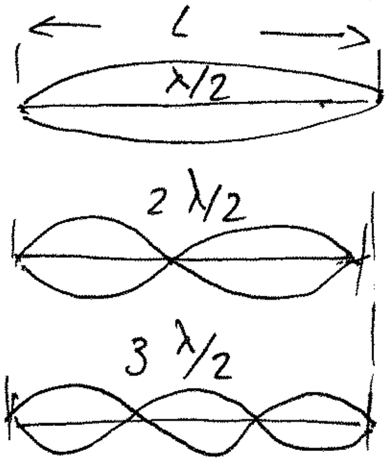
$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} \;;\; n = 1, 2, \ldots$$

El modo fundamental se obtiene para $n=1$

$$L_1 = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 4L_1 = 4 \cdot 0{,}08 = 0{,}32\,m$$

$$v_s = \lambda \cdot f = 0{,}32\,m \cdot 1000\,s^{-1} \Rightarrow \boxed{v_s = 320\,m/s}$$

11 En este caso tratamos de cuerdas fijas por los dos extremos.



Por tanto en los extremos siempre tendremos nodos. En estos casos la longitud de la cuerda tiene que cumplir:

$$\boxed{L = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)}$$

Los distintos modos de vibración se encuentran para los diferentes valores de n:

$n=1 \Rightarrow L = \frac{\lambda}{2}$ (modo fundamental)

$n=2 \Rightarrow L = \lambda$ (2º armónico)

⋮

En nuestro caso, la cuerda Mi emite vibraciones de frecuencia: $f = 659{,}3\ Hz$ para $n=1$, teniendo en cuenta que $L = 32\ cm = 0{,}32\ m$.

a) $L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda}} = 2L = 2 \cdot 0{,}32 = \underline{\underline{0{,}64\ m}}$

$f = 659{,}3\ Hz \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{659{,}3\ Hz} \Rightarrow \boxed{T = 1{,}52 \cdot 10^{-3}\ s}$

$v = \lambda \cdot f = 0{,}64\ m \cdot 659{,}3\ s^{-1} \Rightarrow \boxed{v = 422\ m/s}$

b) Para calcular la posición respecto del extremo a la que hay que presionar para emitir la nota Fa: $f_a = 698{,}5\ Hz$, tendremos que obtener la longitud L' que debe tener para producir el primer armónico (modo fundamental)

$\lambda_a = \frac{v}{f_a} = \frac{422\ m/s}{698{,}5\ Hz} = 0{,}604\ m \Rightarrow n=1 \Rightarrow L' = \frac{\lambda_a}{2}$

$\underline{\underline{L'}} = \frac{0{,}604}{2} = 0{,}302\ m = \underline{\underline{30{,}2\ cm}}$, de donde tendremos que presionar a: $32 - 30{,}2 = \boxed{1{,}8\ cm.\ \text{del extremo}}$

12| Cuerda con extremos fijos.

$L = 75,0\,cm$ y $f_1 = 440\,Hz$ $(n=1)$

a) ¿v? . Como hemos dicho en el ejercicio anterior:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

La frecuencia fundamental se obtiene para.

$$n = 1 \Rightarrow L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L = 2 \cdot 0,75 = 1,5\,m$$

$$\boxed{v = \lambda \cdot f_1 = 1,5\,m \cdot 440\,H_z = 660\,m/s}$$

b) Si $f_1' = 660\,Hz \rightarrow$ ¿L'?

Igual que el ejercicio 11.

$$\lambda' = \frac{v}{f_1'} = \frac{660\,m/s}{660\,s^{-1}} = 1\,m$$

$$L' = \frac{\lambda'}{2} = \frac{1}{2} = 0,5\,m \Rightarrow \boxed{L' = 50\,cm}$$