SOLUCIONES AL CONTROL DE MECÁNICA
8 de Noviembre de 2004

CUESTIONES

1.- Responde razonadamente los siguientes puntos (4 puntos)**:**

a) Es posible asociar algún tipo de energía potencial a la fuerza de rozamiento. ¿Por qué?.

Únicamente en el caso de tratarse de fuerzas conservativas puede hablarse de energía potencial asociada. Sólo cuando el trabajo realizado por la fuerza no depende de la trayectoria sino únicamente de las posiciones inicial y final puede hablarse de energía potencial. Son ejemplos de fuerzas conservativas las fuerzas gravitatorias, las elásticas y las electrostáticas.

Eso no ocurre en el caso de las fuerzas de rozamiento, de naturaleza disipativa. Así, no se requiere el mismo trabajo para trasladar un mueble, arrastrando, si vamos en línea recta que si vamos dando un rodeo ya que en el segundo caso el trabajo realizado por el rozamiento es superior.

b) Describe el movimiento de un móvil cuya ecuación vectorial de movimiento es: $\vec{r} = 2t\hat{j} - t^2\hat{k}$ **. Escribe la ecuación explícita de su trayectoria.**

Derivando la ecuación vectorial de la posición se obtienen las expresiones de velocidad y aceleración del móvil:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\hat{j} - 2t\hat{k} \quad \text{(m/s)}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\hat{k} \quad (\text{m/s}^2)$$

La ecuación de la trayectoria la obtenemos a partir de la expresión vectorial:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2t \\ z = -t^2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{despejando t en la primera: } t = \frac{y}{2}$$

Sustituyendo, ahora, en la segunda expresión, tenemos:

$$z = -\frac{y^2}{4} \quad \rightarrow \quad \text{Expresión correspondiente a un movimiento parabólico.}$$

Se trata, por tanto, de un MUA parabólico.

c) ¿El período de oscilación de un péndulo podría venir dado por la ecuación $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ **?**

Estudiemos la coherencia, o no, de la expresión aplicando el análisis dimensional:

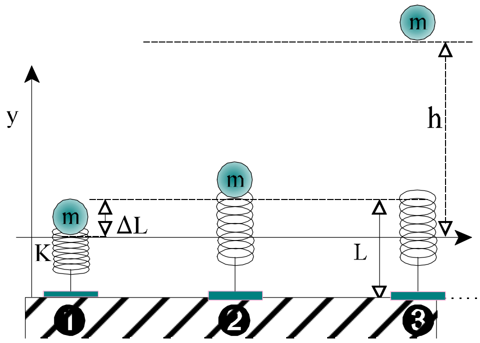
[T] = T ; obviamente

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = \left(\frac{\cancel{L}}{\cancel{L}\cdot T^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} = (T^2)^{1/2} = T$$

Dado que las dimensiones de ambos términos de la igualdad coinciden podemos asegurar que la ecuación es coherente. Otra cosa es que sea correcta o no.

d) Imagina que una bola está botando una y otra vez sobre un muelle. Imaginando que no existen rozamientos haz un análisis de las energías cinética, potencial y los trabajos realizados por la gravedad y el muelle.

Para afrontar el estudio de este caso partamos, como inicio, de la situación en la que la bola se encuentran comprimiendo al máximo al muelle. Como la energía es algo relativo partamos de que la energía potencial gravitatoria de la bola ahí es O, es decir, tomamos esa posición como origen de alturas.



Las fuerzas que intervienen son, ambas, conservativas, con lo que la energía se conservará a lo largo de las oscilaciones de la bola.

La situación, que puede desglosarse en tres situaciones que se repiten, queda representada en la figura.

En ❶, toda la energía sería potencial elástica (ya que hemos considerado que esa posición era el origen de energía potencial gravitatoria). Aquí: $E_1 = ½ \cdot K\, \Delta L^2$

El muelle realiza un trabajo al recuperar su forma, de modo que toda la energía E_1 la transfiere a la bola como energía cinética. Entonces en ❷, ocurre que: $E_2 = ½\, m \cdot v^2$

A partir de aquí la masa queda a merced de la fuerza gravitatoria que realiza un trabajo de oposición al ascenso, por lo que mermará la E_c hasta anularla pero toda esa energía, que no se pierde, queda acumulada en ❸ en forma de energía potencial gravitatoria: E_3=mgh. Es decir, se cumple que: $W_{gravedad} = \Delta E_c = -\Delta E_p$.

A la caída se repetirán las posiciones ❷ (donde ahora toda la energía vuelve a ser cinética) y ❶ (donde la energía queda almacenada en forma de energía potencial elástica)

Así pues, se cumple que: $E_1 = E_2 = E_3 \Rightarrow ½\, K \cdot \Delta L^2 = ½\, m \cdot v_2^2 = m \cdot g \cdot h$

PROBLEMAS

2.- Calcula el trabajo necesario para estirar un muelle 20 cm desde su posición de equilibrio, sabiendo que la constante elástica del muelle es k=200 N/m. ¿Crees que en el proceso se ha conservado la energía? Razónalo

(2 puntos)

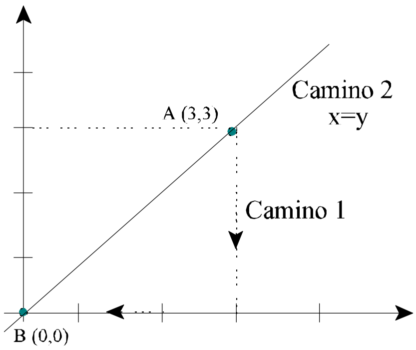
Puesto que se trata de una fuerza variable hemos de resolver calculando la integral. La fuerza que hemos de considerar es la que nosotros ejercemos al estirar el muelle, cuyo valor coincide con la fuerza elástica, aunque su sentido es contrario. Como $\mathbf{F_e}$ = -K x **i**, eso significa que la fuerza a aplicar debe valer Kx **i**:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{0,2} (Kx\hat{i})\cdot dx\hat{i} = \int_0^{0,2} Kx\cdot dx = \left[\frac{Kx^2}{2}\right]_0^{0,2} = \frac{1}{2}\cdot 200\frac{N}{m}\cdot(0,2m)^2 = 4J$$

Como se observa en el cálculo únicamente importa el punto inicial y el final. Eso es así porque estamos actuando en presencia de una fuerza conservativa. Por tanto, los 4 J que hemos realizado al estirar el muelle no han desaparecido, sino que ahora se encuentran almacenados en el muelle en forma de energía potencial elástica. Por consiguiente, aunque el muelle no tenía energía al principio y después si la tiene (al estar estirado) podemos hablar de conservación de energía ya que todo el trabajo realizado, 4 J, se ha acumulado como energía potencial elástica.

3.- Calcula el trabajo realizado por la fuerza F=2 i – 3y j al mover una partícula desde el punto (3,3) al origen de coordenadas. Hazlo por dos caminos distintos y coteja los resultados. ¿Se tratará de una fuerza conservativa?

(2 puntos)



Vamos a hacerlo por dos caminos diferenciados:

El camino 1, se compone de dos tramos rectos:

desde A(3,3) → (3,0) , esto es la recta: x=3 ⇒ dx=0
desde (3,0) → B (0,0), esto es la recta y=0 ⇒ dy=0

El cálculo del trabajo quedará pues:

$$W_{A\to(3,0)\to B} = \int_{(3,3)}^{(3,0)} (2\hat{i} - 3y\hat{j})\cdot(\cancel{dx\hat{i}} + dy\hat{j}) + \int_{(3,0)}^{(0,0)} (2\hat{i} - 3y\hat{j})\cdot(dx\hat{i} + \cancel{dy\hat{j}}) =$$

$$= \int_3^0 -3y\,dy + \int_3^0 2dx = \left[-\frac{3y^2}{2}\right]_3^0 + \left[2x\right]_3^0 = \frac{27}{2} - 6 = \underline{\frac{15}{2} J}$$

Por el **camino 2**, hemos elegido la recta y=x; por tanto dx = dy

$$W_{A\to B} = \int_{(3,3)}^{(0,0)} (2\hat{i} - 3y\hat{j})\cdot(dx\hat{i} + dy\hat{j}) = \int_3^0 2dx - \int_3^0 3y\,dy = \left[2x\right]_3^0 - \left[\frac{3y^2}{2}\right]_3^0 = -6 + \frac{27}{2} = \underline{\frac{15}{2} J}$$

En este segundo caso, ni tan siquiera ha hecho falta utilizar el camino seguido para resolver las integrales, lo cual es una consecuencia obvia de que la fuerza era conservativa.

☺4.- Un fusil, cuyo cañón mide 1 metro de longitud, aplica una fuerza sobre la bala (en el interior del cañón) dada por la expresión: F=200-100x (N). Calcula:

a) El trabajo total realizado.

b) La velocidad con que sale una bala de 10 g.

(2 puntos)

a) Al tratarse de una fuerza variable, es preciso aplicar el cálculo integral para obtener el trabajo realizado. Únicamente hemos de considerar una dimensión en el movimiento, el eje x:

$$W = \int_0^1 (200 - 100x)\hat{i}\cdot dx\hat{i} = \int_0^1 (200 - 100x)\cdot dx = \left[200x - 50x^2\right]_0^1 = (200 - 50) - 0 = \underline{150 J}$$

b) El trabajo realizado por cualquier fuerza, según el teorema de las fuerzas vivas, produce variaciones en la energía cinética de los cuerpos. Es decir:

$W = \Delta E_c = E_{c,f} - E_{c,o} = E_{c,f}$ (dado que: $E_{c,o} = 0$)

Así pues, podemos decir que: $W = ½ \cdot m \cdot v^2$

despejando v, tenemos: $v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{300 J}{0{,}01 Kg}} = \underline{173 \tfrac{m}{s}}$

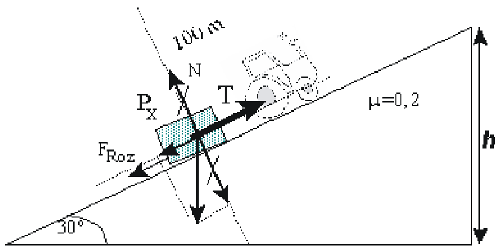
☺**5.- Un bloque de 500 kg asciende a velocidad constante por un plano inclinado de pendiente 30º, arrastrado por un tractor mediante una cuerda paralela a la pendiente. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,2.**

a) Haga un esquema de las fuerzas que actúan sobre el bloque y calcule la tensión de la cuerda.

b) Calcule el trabajo que el tractor realiza para que el bloque recorra una distancia de 100 m sobre la pendiente. ¿Cuál es la variación de energía potencial del bloque?

g =10 m s^{-2}

(2 puntos)



a) Se deduce, del enunciado, que la velocidad de ascensión es constante. Eso supone que la fuerza total que actúa sobre el bloque es cero. Por tanto:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad T - P_x - F_{roz} = 0$$

Puesto que: $\begin{cases} P_x = m \cdot g \cdot sen30º = 2500N \\ F_{roz} = N \cdot \mu = m \cdot g \cdot \cos 30º \cdot \mu = 870N \end{cases}$

Tenemos, finalmente, que: T = 2500 N + 870 N = ***3370 N***

b) El tractor debe vencer el rozamiento que realiza un trabajo disipativo y además debe comunicar energía potencial al bloque. O sea, la energía mecánica final será la que tenía al principio (E_0) más el trabajo total realizado por las fuerzas no conservativas. El balance será:

$E_F = E_0 + W_{no\ cons} \quad \Rightarrow \quad \Delta E = W_{tractor} + W_{roz}$ = 3370N · 100 m - 870 N · 100 m = ***250.000 J***

donde $W_{tractor}$= ***337 000 J***

Como la energía cinética se mantiene constante, todo el trabajo se invierte en aumentar la E_p, Es decir: ΔE_p = ***250 000 J***