FÍSICA 2 - CONTROL DE MECÁNICA
1ª EVALUACIÓN - 14 de Noviembre de 2008

CUESTIONES:

1.- Una partícula se mueve según la ecuación vectorial: $\vec{r} = -2t\hat{i} + \frac{t^2}{2}\hat{j}$. Estudia dicho movimiento y clasifícalo. Obtén la expresión explícita de la trayectoria.

(1,25 puntos)

2.- Deduce el principio de conservación del momento angular y utilízalo para describir cómo es el movimiento del cometa Halley al aproximarse y alejarse del Sol (períodos de 77 años).

(1,25 puntos)

3.- Un alumno ha tomado unas notas, en clase de dinámica de fluidos, según las cuales la ley de Graham y Bunsen dice que la velocidad de salida de un fluido a través de un orificio es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad del fluido y directamente proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de presiones entre el interior y el exterior del recipiente. Es decir: $v = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$

Demuestra la posible veracidad o falsedad de dicha expresión.

(1,25 puntos)

4.- En las retransmisiones de algunos partidos de fútbol, cuando el terreno está mojado, los comentaristas suelen advertir que "el balón toma velocidad al botar sobre el césped". Analiza la afirmación, indicando qué puede haber de cierto o de falso en ella.

(1,25 puntos)

PROBLEMAS (Elige un problema entre el 5 y el 6):

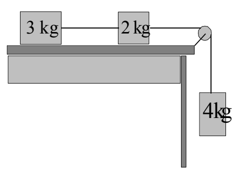
5.- La fuerza $\vec{F} = 2\hat{i} - 3y\hat{j}$ actúa sobre una partícula de 10 g de masa, que se desplaza desde el punto A(3,3) al B (0,0).

a) Calcula el trabajo realizado por dicha fuerza. Razona sobre la posibilidad de que se trate de una fuerza conservativa

b) Si la partícula se movía con una rapidez de 20 m/s en A, ¿con qué velocidad se mueve en B?

(2 puntos)

6.- Para el sistema indicado en la figura en el que μ_e=0,15 y μ_d =0,1, responde:



a) Realiza un diagrama de fuerzas y nómbralas correctamente.

b) Calcula la aceleración del sistema y la tensión de cada hilo.

Dato: g= 10 m·s^{-2}

(2 puntos)

7.- Se deja rodar una bolita de 100 g de masa desde una altura de 2m sobre un plano inclinado 30º. Luego continúa rodando 1 metro más, por una superficie horizontal, hasta que impacta sobre un muelle de K=20 N/m, comprimiéndolo. Suponiendo que los coeficientes de rozamiento, tanto en el plano inclinado como en la horizontal, valen 0,1:

a) Realiza una descripción detallada de las transformaciones energéticas que tienen lugar.

b) Calcula la velocidad con que llegará la bolita a la base del plano inclinado.

c) Calcula la compresión que produce el impacto de la bolita sobre el muelle.

Dato: g= 10 m·s^{-2}

(3 puntos)

NOTA: *Recuerda que los problemas hay que explicarlos. Cuida el orden en la exposición, las unidades y criterios de redondeo así como la limpieza y la ortografía.*

CUESTIONES:

1.- *Una partícula se mueve según la ecuación vectorial:* $\vec{r} = -2t\hat{i} + \frac{t^2}{2}\hat{j}$ *. Estudia dicho movimiento y clasifícalo. Obtén la expresión explícita de la trayectoria.*

Para catalogar el movimiento necesitamos las expresiones de velocidad y aceleración, que obtenemos por derivación:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\hat{i} + t\,\hat{j} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = 1\hat{j} \end{aligned}\right\} \text{ Se trata de un MUA, por ser constante la aceleración.}$$

La ecuación explícita de la trayectoria la obtenemos al eliminar t de las expresiones paramétricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= -2t \\ y &= \frac{t^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\text{despejando } t \text{ de la primera}: \ t = -\frac{x}{2}$$

$$\text{y sustituyendo en la segunda}: y = \frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{8}$$

El movimiento se da en el plano XY, correspondiendo la trayectoria a una parábola. Se trata por tanto, de un movimiento parabólico uniformemente acelerado.

2.- *Deduce el principio de conservación del momento angular y utilízalo para describir cómo es el movimiento del cometa Halley al aproximarse y alejarse del Sol (períodos de 77 años).*

El momento angular o cinético de una partícula que gira respecto a un punto, se define como el momento de la cantidad de movimiento respecto a dicho punto. Esto es: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Si realizamos la derivada temporal del mismo, tenemos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{\substack{\text{esto es cero ya que} \\ \vec{v} \text{ y } \vec{p} \text{ son paralelos}}} + \underbrace{\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}}_{\substack{\text{esto es un momento} \\ \text{de fuerza } (\vec{r} \times \vec{F}) \text{ respecto} \\ \text{al punto O, centro de giro.}}}$$

Por tanto, tenemos que la variación del momento angular de una partícula es igual al momento de la fuerza que actúa sobre ella (ecuación fundamental de la dinámica de rotación):

$$\boxed{\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

De ella se deduce que si el momento total resultante es cero, el cuerpo mantendrá constante su momento cinético, es decir se mantendrá en equilibrio de rotación.

Es decir: Si $\vec{M}_o = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte \Rightarrow$ se conserva el momento cinético.

Eso es precisamente lo que ocurre en el caso de los planetas y cometas orbitan alrededor del Sol. La fuerza actuante (gravedad solar) es paralela al vector posición del cometa, por lo que se conservará, en todo momento, el momento angular: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = cte$.

De este modo, cuando el cometa está más alejado ($\vec{r}\uparrow$) el cometa se moverá más lentamente ($\vec{p}\downarrow$). A medida que se aproxime al Sol ($\vec{r}\downarrow$) aumentará la cantidad de movimiento y, por consiguiente la velocidad, de modo que el momento angular se mantendrá constante.

3.- ***Un alumno ha tomado unas notas, en clase de dinámica de fluidos, según las cuales la ley de Graham y Bunsen dice que la velocidad de salida de un fluido a través de un orificio es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad del fluido y directamente proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de presiones entre el interior y el exterior del recipiente. Es decir:***

$$v=\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$$

Demuestra la posible veracidad o falsedad de dicha expresión.

Si procedemos a realizar un análisis dimensional de la expresión podremos demostrar su coherencia o incoherencia y, con ello, su posible veracidad o falsedad.

$$1^{er}\text{ miembro: } [v]=\frac{[\Delta x]}{[t]}=L\cdot T^{-1}$$

$$2^{o}\text{ miembro: } \left[\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}\right]=\sqrt{\frac{\left[\frac{F}{S}\right]}{\left[\frac{m}{V}\right]}}=\sqrt{\frac{\left[\frac{m\cdot\frac{\Delta v}{t}}{S}\right]}{\left[\frac{m}{V}\right]}}\wedge=\sqrt{\frac{\cancel{M}\cdot L\cdot T^{-2}\cdot L^{-2}}{\cancel{M}\cdot L^{-3}}}=\sqrt{L^{2}\cdot T^{-2}}=L\cdot T^{-1}$$

Con lo que queda demostrada la coherencia dimensional de la expresión, lo que significa que podría ser correcta.

4.- ***En las retransmisiones de algunos partidos de fútbol, cuando el terreno está mojado, los comentaristas suelen advertir que "el balón toma velocidad al botar sobre el césped". Analiza la afirmación, indicando qué puede haber de cierto o de falso en ella.***

Para resolver la cuestión hemos de considerar la velocidad del balón, y el impacto sobre el suelo, descompuesta en una componente vertical y otra horizontal.

En el bote sobre suelo no existe, de ningún modo, una fuerza que lo impulse hacia delante en la componente x con lo que es absurdo afirmar que pueda acelerar. Al contrario, sólo cabe esperar rozamiento, con lo que la velocidad tras el bote siempre será inferior a la velocidad inicial. Ahora bien, es cierto que con el césped mojado la fricción disminuye mucho (efecto aquaplaning) y, por consiguiente, la velocidad en la horizontal no se reduce tanto como en el césped seco.

Por otro lado, con el césped muy mojado la componente vertical se ve más afectada de lo normal, ya que se amortiguamiento que disminuye mucho la altura del bote. Los dos efectos combinados suponen que en el campo mojado la pelota bota avanzando más rápido de lo normal pero con menos altura. Por eso, "el disparo con bote" en un partido lluvioso suele ser un buen arma para batir al guardameta.

PROBLEMAS (Elige un problema entre el 5 y el 6):

5.- ***La fuerza $\vec{F}=2\hat{i}-3y\hat{j}$ actúa sobre una partícula de 10 g de masa, que se desplaza desde el punto A(3,3) al B (0,0).***

a) Calcula el trabajo realizado por dicha fuerza. Razona sobre la posibilidad de que se trate de una fuerza conservativa

b) Si la partícula se movía con una rapidez de 20 m/s en A, ¿con qué velocidad se mueve en B?

a) Ecuación de la trayectoria: x=y, con lo que dx=dy

A(3,3) → B (0,0)

$$W_{A\to B}=\int_{(3,3)}^{(0,0)}(2\hat{i}-3y\hat{j})(dx\hat{i}+dy\hat{j})=\int_{3}^{0}2dx-\int_{3}^{0}3ydy=[2x]_{3}^{0}-\left[\frac{3y^{2}}{2}\right]_{3}^{0}=-6J+\frac{27}{2}J=\underline{7{,}5J|}$$

Obsérvese cómo para resolver la integral no se necesita relacionar variables, esto es un indicio claro de que el trabajo es independiente de la trayectoria. Se trata de una fuerza conservativa.

b) Como el trabajo total realizado sobre una partícula se invierte en incrementar su energía cinética (teorema de las fuerzas vivas), tendremos que:

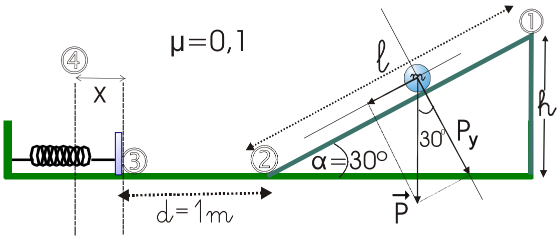
$W = \Delta E_c$, de donde: $E_{c,F} = E_{c,0} + W$

$$\tfrac{1}{2}\cdot m\cdot v_f^2 = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot v_0^2 + W$$

$$v_f = \sqrt{\frac{m\cdot v_0^2 + 2W}{m}} = \sqrt{v_o^2 + \frac{2W}{m}} = \sqrt{\left(20\tfrac{m}{s}\right)^2 + \frac{15J}{0{,}01kg}} = \underline{44\, m/s|}$$

7.- Se deja rodar una bolita de 100 g de masa desde una altura de 2m sobre un plano inclinado 30º. Luego continúa rodando 1 metro más, por una superficie horizontal, hasta que impacta sobre un muelle de K=20 N/m, comprimiéndolo. Suponiendo que los coeficientes de rozamiento, tanto en el plano inclinado como en la horizontal, valen 0,1:

a) Realiza una descripción detallada de las transformaciones energéticas que tienen lugar.
b) Calcula la velocidad con que llegará la bolita a la base del plano inclinado.
c) Calcula la compresión que produce el impacto de la bolita sobre el muelle.
Dato: g= 10 m·s^{-2}



a) La bolita arriba posee energía mecánica en forma de energía potencial gravitatoria. A medida que desciende por el plano se produce una transformación de energía potencial a cinética, disipándose parte en forma de calor por causa del rozamiento.

Al final del plano inclinado (2) la bolita posee únicamente energía cinética. Continúa deslizándose por el plano horizontal, por el que continúa la disipación de energía cinética a calor, ahora con mayor intensidad que en el plano inclinado ya que ahora la normal es mayor. En (3) la bolita sólo posee energía cinética, aunque menos que en (2), y por tanto la velocidad ha disminuido.

Cuando se produce el impacto contra el muelle, desde 3 a 4, la energía cinética se transforma en potencial elástica, aunque no íntegramente ya que parte sigue disipándose por rozamiento con el suelo durante la compresión.

En la posición final (4) sólo tendrá energía potencial elástica, dándose la circunstancia de que:

$$E_{p,e}(4) = E_{p,g}(1) + W_{roz,incl} + W_{roz,hor}$$

Es decir, la energía mecánica final (sólo potencial elástica) será igual a la energía potencial gravitatoria de partida menos las energías disipadas por los rozamientos en el plano inclinado y en la horizontal (incluida la compresión del muelle: d+x).

b) En el descenso por el plano inclinado se produce un trabajo de disipación por rozamiento. Aplicando el teorema de la energía mecánica, tenemos:

$E_{m,2} = E_{m,1} + W_{no,cons} \rightarrow \quad E_{c,2} = E_{p,1} + W_{roz,incl}$

$$\tfrac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot v_2^2 = \cancel{m}\cdot g\cdot h - \mu\cancel{m}g\cdot\cos\alpha\cdot \underbrace{l}_{\frac{h}{sen\alpha}}$$

$$\tfrac{1}{2}v_2^2 = gh - \mu g\cdot\cot g\alpha\cdot h = gh\cdot(1-\mu\cdot\cot g\alpha)$$

$$v_2 = \sqrt{2gh(1-\frac{\mu}{tg\alpha})} = \sqrt{2\cdot 10\tfrac{m}{s^2}\cdot 2m(1-\frac{0{,}1}{tg30^o})} = \underline{5{,}8\tfrac{m}{s}|}$$

El término μ/tgα, que está restando en la expresión anterior, representa la merma en la velocidad de caída respecto a la situación sin rozamiento [que daría: $v=(2gh)^{-1/2}$]. Se interpreta fácilmente que a menor coeficiente de rozamiento y mayor pendiente mayor será la velocidad en (2).

c) Aplicando directamente el teorema de la energía mecánica, tenemos la expresión:

$$E_{m,4} = E_{m,1} + W_{no\ cons}$$

Esto es, la energía final de la bolita será igual a la inicial más los trabajos realizados durante el trayecto. En nuestro caso queda como apuntábamos en el apartado a):

$$E_{p,e}(4) = E_{p,g}(1) + W_{roz,incl} + W_{roz,hor}$$

$$\tfrac{1}{2} K \cdot x^2 = m \cdot g \cdot h - \mu mg \cdot \cot g\ \alpha - \mu mg \cdot (d+x)$$

Se obtiene una ecuación de 2º grado, por lo que para resolver con mayor fluidez evitaremos las unidades en las operaciones:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + \mu mgx = mgh - \mu mg \cdot (h \cdot \cot g\alpha - 1) \\
&10x^2 + 0{,}1x = 2 - 0{,}1 \cdot (2\sqrt{3} - 1) \\
&10x^2 + 0{,}1x - 1{,}75 = 0 \\
&x = \frac{-0{,}1 \pm \sqrt{0{,}1^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-1{,}75)}}{2 \cdot 10} = \begin{cases} x = 0{,}41m \\ x = -0{,}42m \end{cases}
\end{aligned}$$

La solución con sentido físico es la positiva. Por tanto, la bolita comprime al muelle 41 cm.