Métodos matemáticos de la física

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Estudia el proceso seguido por Eratóstenes para medir el radio de la Tierra:**

www.e-sm.net/f2bach01

Eratóstenes tenía noticia de un hecho que cada año se producía en una ciudad de Egipto llamada Siena (hoy Asuán). Sucedía que cierto día del año, al mediodía, los obeliscos no producían sombra alguna. El agua de los pozos reflejaba como un espejo la luz del Sol. Hoy sabemos que esto es debido a que Asuán se encuentra en el Trópico de Cáncer y ese día marca el solsticio de verano (este hecho era festivo y muy celebrado por los lugareños). Sin embargo, Eratóstenes observó que en Alejandría, ese mismo día, los obeliscos sí producían sombra. Eso solo es posible si la Tierra es redonda, pues el Sol está tan lejos como para considerar que sus rayos inciden paralelamente sobre la Tierra.

Eratóstenes pensó que midiendo la sombra de un obelisco en Alejandría, el mismo día y a la misma hora en que en Siena no proyectaba ninguna sombra, y sabiendo la distancia entre Alejandría y Siena, podría calcularse la circunferencia terrestre, pues da la casualidad de que Siena está al sur de Alejandría (prácticamente en el mismo meridiano).

2. **¿Qué magnitudes conoces que no sigan el sistema decimal para definir sus múltiplos y submúltiplos?**

En nuestro sistema de numeración, la influencia babilónica y su sistema sexagesimal es patente en nuestra medición del tiempo y de los ángulos, aspectos en los que ellos fueron verdaderos expertos. De hecho, aprovechando la implantación generalizada del sistema métrico a comienzos del s. XIX, se intentó introducir los ángulos en el sistema decimal, haciendo un recto igual a 100º en vez de 90º. Este grado centesimal que a veces se usa en topografía no se ha implantado, sin embargo, en la vida cotidiana.

3. **En la caída libre de cuerpos, la expresión que relaciona las velocidades inicial y final con la altura es: $v_f^2 - v_0^2 = 2gh$ (g = 9,81 m s^{-2}).**

a) Si v_f = 6,7 m s^{-1} y v_0 = 1,2 m s^{-1}, redondea el valor de v_f^2, v_0^2 y halla *h*.

b) Si parte del reposo y cae una altura de 12,40 m, calcula v_f.

a) $v_f^2 = 44{,}89 = 45\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2}$; $v_0^2 = 1{,}44 = 1{,}4\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2}$

Y manteniendo las dos cifras significativas de los datos de velocidad:

$$h = \frac{45 - 1{,}4}{2 \cdot 9{,}81} = 2{,}2\ \text{m}$$

b) La velocidad final es: $v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 12{,}40} = 15{,}6\ \text{m s}^{-1}$

En este caso, se puede trabajar con 3 cifras significativas.

4. **Las dimensiones de un aula son:**

8,7 m × 9,5 m × 2,85 m

Si la densidad del aire a presión atmosférica y temperatura de 25 ºC es de 1,19 kg m^{-3}, calcula el volumen y la masa de aire, expresándolo con el número adecuado de c. s.

Si se realizan las operaciones y se aproxima al número adecuado de cifras significativas, se tiene:

Volumen = 8,7 m × 9,4 m × 2,85 m = 230 m^3

Masa = Volumen · densidad = 230 · 1,19 = 270 kg

5. **A partir de los vectores $\vec{a}$ (1, 0, –3); $\vec{b}$ (3, –2, 0); $\vec{c}$ (–1, 2, –2), efectúa las operaciones que se piden.**

a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ **b)** $\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$ **c)** $-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ **d)** $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ **e)** $\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ **f)** $5(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$

a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ = (1 + 3 – 1, 0 – 2 + 2, –3 + 0 – 2) = (3, 0, –5)

b) $\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$ = (1 + 6 + 3, 0 – 4 – 6, –3 + 0 + 6) = (10, –10, 3)

c) $-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ = (–1 – 3 – 2, 0 + 2 + 4, 3 – 0 – 4) = (–6, 6, –1)

d) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ = (1 + 3 + 1, 0 – 2 – 2, –3 + 0 + 2) = (5, –4, –1)

e) $\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ = (1 – 3 – 2, 0 + 2 + 4, –3 – 0 – 4) = (–4, 6, –7)

f) $5(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$ = 5 (–1 – 3 – 1, 0 + 2 + 2, 3 – 0 – 2) = 5 (–5, 4, 1) = (–25, 20, 5)

6. **Tenemos tres fuerzas concurrentes F_1 = 40 N; F_2 = 50 N; F_3 = 25 N, formando 30º, 120º y –180º respectivamente con el eje *x*. Halla:**

a) La fuerza resultante de sumar las tres.

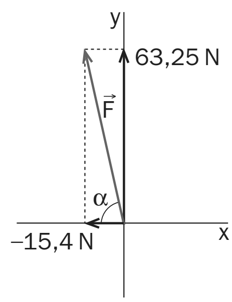
b) Su módulo y el ángulo que forma con *x*.

a) Descomponemos las fuerzas según los ejes y sumamos:

Resultante en *x*: 40 cos 30º – 50 sen 30º – 25 = 40 $\sqrt{3}$ /2 – 50 · $\frac{1}{2}$ – 25 = –15,4 N

Resultante en *y*: 40 sen 30º + 50 cos 30º = 40 · $\frac{1}{2}$ + 50 $\sqrt{3}$ /2 = 63,3 N

El vector suma será: $\vec{F}_{neta} = -15{,}4\ \vec{i} + 63{,}3\ \vec{j}$ (en N)



b) Su módulo vale:

$$F = \sqrt{15{,}4^2 + 63{,}3^2} = 65{,}1\,\text{N}$$

El ángulo que forma con el eje *x* se puede obtener a partir de la tangente.

Según el dibujo: $\text{tg}\,\alpha = \frac{63{,}3}{15{,}4} \Rightarrow \alpha = 76{,}3º$ con la parte negativa de *x*.

O bien 103,7º con *x*.

7. **Dados los vectores $\vec{a}$ (2, –2, 1) y $\vec{b}$ (–1, –1, 0), halla:**

a) El ángulo que forman entre sí.

b) La proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

a) A partir de la definición:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha = \sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+1+0}\cdot\cos\alpha = 3\sqrt{2}\,\cos\alpha$$

A partir de sus coordenadas:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z = 2\cdot(-1) - 2\cdot(-1) + 0 = 0$$

Despejando:

$$\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{6}\,\sqrt{13}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90º$$

b) Proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$: b cos α = 0

8. El trabajo físico se define como el producto escalar del vector fuerza $\vec{F}$ por el vector desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$. Calcula el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ (2, 1, –2) al desplazar su punto de aplicación desde A(1, 4, 0) hasta B(3, –2, 1) (en unidades del SI).

A partir de los vectores: $\vec{r}_A$ = (1, 4, 0); $\vec{r}_B$ (3, –2, 1)

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (2, -6, 1)$$

El trabajo será: $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ = (2, 1, –2) · (2, –6, 1) = 2 · 2 + 1 · (–6) – 2 · 1 = –4 J

9. Calcula el producto vectorial de $\vec{a}$ (1, –1, 2) por $\vec{b}$ (2, 1, 0) y comprueba que el resultado es perpendicular a ambos vectores.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 4, 3)$$

Para comprobar que son perpendiculares, veamos si su producto escalar es nulo:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a} = (-2, 4, 3) \cdot (1, -1, 2) = -2 - 4 + 6 = 0$$

Igualmente:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{b} = (-2, 4, 3) \cdot (2, 1, 0) = -4 + 4 + 0 = 0$$

10. El punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}$ (2, –3, 4) N es el punto P (3, 0, 2) m. Calcula el momento de la fuerza $\vec{F}$:

a) Respecto al origen.

b) Respecto al punto (1, 1, 1).

a) $$\vec{M}_0 = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 8\vec{j} - 9\vec{k} = (6, -8, -9)\text{ N m}$$

b) $$\vec{M}_{(1,1,1)} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 6\vec{j} - 4\vec{k} = (-1, -6, -4)\text{ N m}$$

11. A partir de las identidades trigonométricas, calcula todas las razones de un ángulo cuyo seno vale $\frac{1}{3}$.

Usamos primero la identidad fundamental: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

De donde: $\frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

La tangente, entonces, es inmediata: $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

A partir de ahí, usando las razones recíprocas, tenemos todas:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$; $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\text{cotg}\,\alpha = 2\sqrt{2}$; $\sec\alpha = \frac{3}{2\sqrt{2}}$; $\text{cosec}\,\alpha = 3$

12. **Halla la suma y la resta de las funciones siguientes:**

$$y_1 = 5 \cdot 10^{-2} \cos(100\pi\, t - \pi/3);\;\; y_2 = 5 \cdot 10^{-2} \cos(100\pi\, t + \pi/3)$$

Suma:

$y_1 + y_2 = 5 \cdot 10^{-2} [\cos(100\pi\, t - \pi/3) + \cos(100\pi\, t + \pi/3)]$

$y_1 + y_2 = 5 \cdot 10^{-2} [2 \cos 100\pi\, t \cdot \cos \pi/3]$ (ya que es igual $\cos \pi/3$ que $\cos(-\pi/3)$

$y_1 + y_2 = 0{,}1 \cos 100\pi\, t \cdot \cos\pi/3$

Resta:

$y_1 - y_2 = 5 \cdot 10^{-2} [\cos(100\pi\, t - \pi/3) - \cos(100\pi\, t + \pi/3)]$

$y_1 - y_2 = 5 \cdot 10^{-2} [-2 \text{ sen } 100\pi\, t \cdot \text{sen }(-\pi/3)] = 5 \cdot 10^{-2} [2 \text{ sen } 100\pi\, t \cdot \text{sen } \pi/3]$

$y_1 - y_2 = 0{,}1 \text{ sen } 100\pi\, t \cdot \text{sen } \pi/3$

13. **Halla la derivada de la función: $y = x^3 + 2x^{-2} - 3$, en $x = 2$.**

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x^{-3}$$

Que en $x = 2$ toma el valor: $y'(2) = 12 - \frac{4}{8} = \frac{23}{2}$

14. **Halla el ángulo que forma con *x* la tangente a la curva representada por $y = \frac{2}{x}$:**

a) en el punto $x = 1$; **b) en $x = -2$**

a) La derivada es: $\text{tg } \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^2}$

En $x = 1$: $\text{tg } \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg }(-2) = -63{,}4º$

b) En $x = -2$: $\text{tg } \alpha = -1/2 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg }(-1/2) = -26{,}6º$

15. **Halla la derivada de las siguientes funciones.**

a) $y = \text{sen } 2x$ **b) $y = \cos^2 x$** **c) $y = x^2 \cdot e^x$** **d) $y = \frac{1}{x^2} \cdot \text{Ln } x$** **e) $y = \sqrt{x^3 + 2x}$**

a) $\frac{dy}{dx} = 2 \cos 2x$

b) $\frac{dy}{dx} = 2 \cos x\, (-\text{sen } x) = -2 \text{ sen } x \cos x = -\text{sen } 2x$

c) $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x\, e^x (2 + x)$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^3} \text{ Ln } x + \frac{1}{x^2} \frac{1}{x} = \frac{1}{x^3} (1 - 2 \text{ Ln } x)$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2}{2\sqrt{x^3 + 2x}}$

16. **Un movimiento plano queda descrito por las ecuaciones paramétricas: $x(t) = t^2/2 + 2$; $y(t) = t^2 - 1$ Determina la velocidad y la aceleración del móvil (en unidades del SI).**

El vector de posición es: $\vec{r} = (t^2/2 + 2)\, \vec{i} + (t^2 - 1)\, \vec{j}$ (m)

1ª derivada: $\vec{v} = t\, \vec{i} + 2t\, \vec{j}$ ($m\, s^{-1}$) $\Rightarrow$ Cuyo módulo vale: $v = \sqrt{t^2 + 4t^2} = t\sqrt{5}$ ($m\, s^{-1}$)

2ª derivada: $\vec{a} = \vec{i} + 2\, \vec{j}$ ($m\, s^{-2}$) $\Rightarrow$ Cuyo módulo vale: $a = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ ($m\, s^{-2}$)

17. Un movimiento queda descrito por: $\vec{r} = -t^2\,\vec{i} + 2t^2\,\vec{j}$. Halla $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$. ¿Qué tipo de movimiento describe el móvil?

El vector de posición es: $\vec{r} = -t^2\,\vec{i} + 2t^2\,\vec{j}$ (m)

1ª derivada: $\vec{v} = -2t\,\vec{i} + 4t\,\vec{j}$ (m s^{-1}) $\Rightarrow$ Cuyo módulo vale: $v = \sqrt{4t^2 + 16t^2} = t\,2\sqrt{5}$ (m s^{-1})

2ª derivada: $\vec{a} = -2\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$ (m s^{-2}) $\Rightarrow$ Cuyo módulo vale: $a = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$ (m s^{-2})

Para hallar el módulo de la aceleración tangencial, derivamos el módulo de la velocidad:

$$|\vec{a}_t| = \frac{dv}{dt} = 2\sqrt{5}\ \text{(m s}^{-2}\text{)};\ \vec{a}_t = 2\sqrt{5}\ \vec{u}_t\ \text{(m s}^{-2}\text{)}$$

Y vemos que se obtiene el mismo valor que el de la aceleración total. Teniendo en cuenta que: $\vec{a}(t) = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

Podemos concluir que la $a_n = 0$. Así pues, se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

18. Un movimiento queda descrito por: $\vec{r} = 2t^3\,\vec{i} + (t^2 - 2t)\,\vec{j}$. Halla las componentes intrínsecas de la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria en t = 1 s (en unidades del SI).

El vector de posición es: $\vec{r} = 2t^3\,\vec{i} + (t^2 - 2t)\,\vec{j}$ (m)

1ª derivada: $\vec{v} = 6t^2\,\vec{i} + (2t-2)\,\vec{j}$ (m s^{-1}) $\Rightarrow$ En t = 1s: $\vec{v} = 6\,\vec{i}$ (m s^{-1});

El módulo vale: $v = \sqrt{36t^4 + 4t^2 + 4 - 8t}$; y, en efecto, para t = 1 s, se tiene v = 6 m s^{-1}

2ª derivada: $\vec{a} = 12t\vec{i} + 2\vec{j}$ (m s^{-2}) $\Rightarrow$ En t = 1s: $\vec{a} = 12\vec{i} + 2\vec{j}$ (m s^{-2}); cuyo módulo vale: $a = \sqrt{148}$ m s^{-2}

Para hallar el módulo de la aceleración tangencial, derivamos el módulo de la velocidad:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{144\,t^3 + 8t - 8}{2\sqrt{36\,t^4 + 4\,t^2 + 4 - 8t}}\ \text{m s}^{-2}$$

En t = 1s vale: $a_t = 12$ m s^{-2}; $\vec{a}_t = 12\,\vec{u}_t$ (m s^{-2})

Teniendo en cuenta que: $\vec{a}(t) = \vec{a}_t + \vec{a}_n$; es decir: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$; o bien: $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{148 - 144} = 2$ m s^{-2}

Teniendo en cuenta que: $a_n = \dfrac{v^2}{R} \Rightarrow R = \dfrac{v^2}{a_n} = \dfrac{6^2}{2} = 18$ m

19. El vector $\vec{r} = t^2\vec{i} - 2t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ es el vector de posición de un móvil de masa 5 kg. Aplica la expresión $\vec{F}_{neta} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ para hallar la fuerza resultante que actúa sobre el móvil, en función del tiempo.

1ª derivada: $\vec{v} = 2t\vec{i} - 4t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ (m s^{-1}) $\Rightarrow$ $\vec{p} = m\vec{v} = 10t\vec{i} - 20t\vec{j} + 15t^2\vec{k}$ (kg m s^{-1})

Derivando: $\vec{F}_{neta} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = 10\vec{i} - 20\vec{j} + 30t\,\vec{k}$ (N)

20. La velocidad de un móvil con movimiento rectilíneo viene dada por v(t) = 8t – 2. Calcula el espacio Δx recorrido por el móvil entre $t_1 = 0$ y $t_2 = 4$ s, sabiendo que responde a la ecuación:

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt\ \text{(en unidades del SI)}$$

Calculamos la integral entre los límites propuestos:

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \int_0^4 (8t-2)\,dt = \left[4t^2 - 2t\right]_0^4 = (64-8) - 0 = 56\ \text{m}$$

21. Sabiendo que la integral de un vector es la suma de las integrales de cada una de sus componentes, calcula la integral de la siguiente función vectorial entre t = 0 y t = 3 s.

$$\vec{v} = 3t\,\vec{i} + (2t^2 - 2)\,\vec{j}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[3t\,\vec{i} + (2t^2 - 2)\,\vec{j}\right] dt = \left[\frac{3t^2}{2}\,\vec{i} + \left(\frac{2t^3}{3} - 2t\right)\vec{j}\right]_0^3 = \frac{27}{2}\,\vec{i} + 12\,\vec{j}$$

22. Una partícula que se mueve en el eje *x* posee una energía potencial dada por $\Phi = \frac{1}{2}kx^2$ (que se corresponde con un campo escalar). Calcula la fuerza a que se encuentra sometida sabiendo que:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$$

Por tratarse del eje *x*, la derivada anterior se puede poner:

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi = -\frac{dF}{dx}\,\vec{i} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)\vec{i} = -kx\,\vec{i}$$

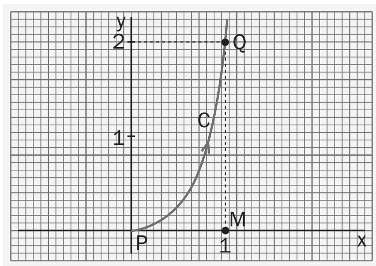
Una fuerza de estas características es la fuerza elástica: si se refiere a un resorte, *x* representa la deformación del mismo. Su estudio se puede abordar mediante un campo escalar (Φ) o mediante un campo vectorial ($\vec{F}$), relacionados ambos mediante el operador gradiente.

23. Con los mismos datos del ejercicio resuelto 14, calcula la circulación de $\vec{F}$ según el camino siguiente: desde P(0, 0) hasta M(1, 0) y luego, paralelamente a *y*, de *M* a *Q*.

De P(0, 0) a M(1, 0) siguiendo la recta y = 0 ⇒ dy = 0

En este caso, la circulación, o trabajo, será cero, ya que:

$$W_C = \int_C \vec{F}\,d\vec{r} = \int_C 2xy\,dx + x^2\,dy = 0$$



De M(1, 0) a Q(1, 2) siguiendo la recta x = 1 ⇒ dx = 0

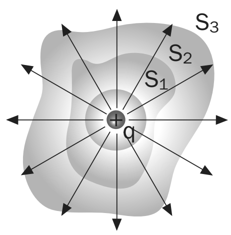
Sustituimos y queda:

$$W_C = \int_0^2 (0 \cdot dx + 1 \cdot dy) = [y]_0^2 = 2\ \text{J}$$

Como se puede ver, sale el mismo resultado yendo por el camino C_1 que por C_2. Aquellas fuerzas cuya circulación es la misma, sea cual sea el camino seguido, se llaman fuerzas conservativas y, en consecuencia, al campo se le llama también conservativo. (Rigurosamente, debería comprobarse para cualquier trayectoria.)

24. Una superficie gaussiana esférica tiene una carga +*q* en su centro. Describe lo que ocurre con el flujo si: a) se duplica el radio de la esfera; b) se duplica el valor de +*q*; c) se cambia la esfera por un cubo.

El enunciado del teorema de Gauss nos permite responder a esta cuestión de forma casi inmediata. Recordemos que el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada depende solo de las fuentes de campo interiores a la misma y no de la forma de la superficie. Así pues:



a y c) Si se duplica el valor del radio de la esfera o cambia la forma de la misma, no se modifica el flujo, como puede verse intuitivamente en el dibujo.

b) Si se duplica la carga, se duplica el flujo.