13 Elementos de física relativista

EJERCICIOS PROPUESTOS

13.1 Calcula el tiempo que tardaría el barco en los dos casos expuestos en el ejemplo del epígrafe, si:

D = 100 m, v_c = 2 m s^{-1} y v = 3 m s^{-1}.

$$t_A = \frac{2D}{v\sqrt{1-\frac{v_c^2}{v^2}}} = \frac{2\cdot 100}{3\sqrt{1-\frac{2^2}{3^2}}} = 89{,}4\ \text{s}\ ;\ t_B = \frac{2\,D\,v}{v^2 - v_c^2} = \frac{2\cdot 100\cdot 3}{3^2 - 2^2} = 120\ \text{s}$$

13.2 Calcula la relación entre los tiempos t_A y t_B, empleados por la luz en recorrer los brazos del interferómetro de Michelson, en el caso de que existiese el viento del éter con v = 3,00 · 10^4 m s^{-1}.

$$\frac{t_A}{t_B} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{(3{,}00\cdot 10^4)^2}{(3{,}00\cdot 10^8)^2}} = 0{,}999999995$$

13.3 Vega es una estrella de la constelación de la Lira que se encuentra a 27 años luz de la Tierra.

a) Determina la distancia en kilómetros desde Vega a la Tierra.

b) Si Vega experimentara una explosión de tipo supernova, indica cómo observarían este fenómeno un observador cercano a la estrella y un observador en la Tierra.

a) 1 año-luz = $3{,}00\cdot 10^8\cdot 365\cdot 24\cdot 3600 = 9{,}46\cdot 10^{15}$ m $\Rightarrow$ Vega se encuentra a $27\cdot 9{,}46\cdot 10^{15} = 2{,}55\cdot 10^{17}$ m

b) Un observador cercano a la estrella vería el acontecimiento inmediatamente. Un observador en la Tierra tardaría 27 años en verlo.

13.4 Un tren de 200 m de longitud parte de una estación a una velocidad constante de 5 m s^{-1}. En el mismo instante una persona comienza a andar desde la locomotora hacia el vagón de cola 2 m s^{-1}. Determina, aplicando la transformación de Galileo, la velocidad y la posición de la persona respecto a la estación al cabo de 8 s.

La velocidad de la persona respecto al muelle es v = 5 – 2 = 3 m s^{-1}, que no varía con el tiempo.
Respecto a un sistema de referencia fijo en la estación, *S*, la persona está inicialmente en x_0 = 200 m. Al cabo de 8 s, su posición es: x = x_0 + vt = 200 + 3 · 8 = 224 m.

13.5 Comprueba mediante un ejemplo que, cuando v << c, una buena aproximación del término $k = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ es $k' = 1-\frac{v^2}{2c^2}$.

Sea v = 0,001c:

$$k = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{(0{,}001c)^2}{c^2}} = 0{,}9999995$$

$$k' = 1-\frac{v^2}{2c^2} = 1-\frac{(0{,}001c)^2}{2c^2} = 0{,}9999995$$

13.6 Una nave espacial viaja a una velocidad constante de 0,8c. Al pasar cerca de la Tierra, mide el diámetro de esta.

Indica qué distancia medirá suponiendo que el diámetro exacto de la Tierra (medido desde la propia Tierra) es 1,274 · 10^7 m. Comprueba si es aceptable en este caso la aproximación $k \approx 1-\frac{v^2}{2c^2}$.

$$L' = L\,k = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1{,}274\cdot 10^7\sqrt{1-\frac{(0{,}8c)^2}{c^2}} = 1{,}274\cdot 10^7\cdot 0{,}6 = 7{,}64\cdot 10^6\,\mathrm{m}$$

Utilizando la aproximación:

$$L' = L\,k' = L\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right) = 1{,}274\cdot 10^7\left(1-\frac{(0{,}8c)^2}{2c^2}\right) = 1{,}274\cdot 10^7\cdot 0{,}68 = 8{,}66\cdot 10^6\,\mathrm{m}$$

Por tanto, la aproximación no es tan buena.

13.7 Si una nave que viaja a una velocidad de 0,6c, respecto a la Tierra lanza un haz láser en su misma dirección y sentido, determina la velocidad de este haz respecto a la Tierra.

La velocidad de la luz es siempre *c*. Haciendo el cálculo, se tiene:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1+\frac{v\,v'_x}{c^2}} = \frac{c+0{,}6c}{1+\frac{0{,}6c\,c}{c^2}} = c$$

13.8 Una nave espacial viaja a 0,7c respecto de la Tierra. Calcula qué velocidad debe llevar otra nave espacial para adelantar a la primera con una velocidad relativa de 0,5c.

Si se combinan las velocidades, se tiene:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1-\frac{v\,v_x}{c^2}};\ 0{,}5c = \frac{v_x - 0{,}7c}{1-\frac{0{,}7c\,v_x}{c^2}} = \frac{v_x - 0{,}7c}{1-\frac{0{,}7v_x}{c}} \Rightarrow v_x = 0{,}89c$$

13.9 Determina la masa inercial de un electrón que se mueve a la velocidad de 0,9c sabiendo que su masa medida por un observador en reposo respecto al electrón es de $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg.

La masa aumenta cuando la velocidad se aproxima a la de la luz.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{(0{,}9c)^2}{c^2}}} = 2{,}3m_0 = 2{,}1\cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg}$$

13.10 Calcula la energía que se podría obtener de la conversión completa en energía de 1 g de carbón (si eso fuese posible).

La conversión de energía se realiza con la siguiente ecuación:

$$E = m_0c^2 = 10^{-3}\cdot(3{,}00\cdot 10^8)^2 = 9{,}00\cdot 10^{13}\,\mathrm{J}$$

13.11 ¿Por qué la luz es atraída por los campos gravitatorios al igual que lo son objetos con masa?

Según la equivalencia masa-energía, la radiación, como cualquier forma de energía, tiene una masa inerte o inercial. Si la masa inercial es la misma que la masa gravitatoria, la radiación también tendrá una masa gravitatoria y se verá afectada por los campos gravitatorios. Así, la luz describiría una trayectoria parabólica dentro de los cambos gravitatorios constantes, igual que los proyectiles.

13.12 ¿Qué se entiende por masa inercial y por masa gravitatoria? ¿Qué postula la teoría de la relatividad general sobre estas masas?

La relación $\frac{\text{Peso}}{g} = m$ se denomina masa gravitatoria. La relación $\frac{\text{Fuerza}}{a} = m'$ se denomina masa inercial.

La teoría de la relatividad general postula que ambas masas son iguales.

13.13 Imagina que unos seres habitan en un mundo bidimensional plano.

a) ¿Podrían tener "noticias" sobre la existencia de seres tridimensionales?

b) Imagina como podría ser observada por ellos la llegada de una nave esférica a su mundo.

a) Solo podrían tener noticias mediante la intersección de objetos 3D con un plano.

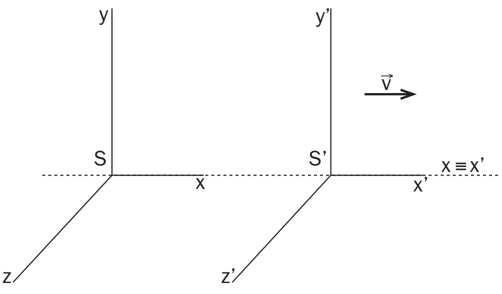
b) Se podría imaginar que los cortes de una esfera con un plano son círculos concéntricos que crecen hasta un círculo máximo y después decrecen de nuevo hasta un punto.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SISTEMAS DE REFERENCIA Y TRANSFORMACIÓN DE GALILEO

13.14 Demuestra, mediante la transformación de Galileo, que se conservan las longitudes de los objetos.

Para simplificar, se supone un segmento de longitud *L* situado en el eje *x*. Respecto al sistema de referencia *S*, sus extremos están situados en los puntos x_1 y x_2, de forma que: $L = x_2 - x_1$. Aplicando la transformación de Galileo, las coordenadas de sus extremos, medidas respecto al sistema de referencia *S'*, son:



$$x_2' = x_2 - v\,t$$

$$x_1' = x_1 - v\,t$$

La nueva longitud del segmento, *L'*, medida en el sistema *S'*, es:

$$L' = x_2' - x_1' = (x_2 - x_1) - v\,t + v\,t = x_2 - x_1 = L$$

13.15 Un hombre navega por un río en un bote corriente arriba y lleva una bombona de agua medio vacía en la popa del bote. Cuando el bote pasa debajo de un puente, la bombona cae al agua sin que el hombre se dé cuenta.

Durante 20 minutos el bote continúa aguas arriba mientras que la botella flota aguas abajo. Transcurrido ese tiempo, el hombre se da cuenta de que la bombona ha desaparecido y vuelve aguas abajo con la misma velocidad respecto al agua que antes y la recoge un kilómetro más abajo del puente. Determina la velocidad que lleva la corriente.

Si se intentan referir lo hechos a un sistema de referencia fijo en la orilla, el problema resulta verdaderamente complicado. Sin embargo, el problema se simplifica mucho si los hechos se refieren a un sistema que se mueve con el agua. En ese sistema podemos suponer la superficie de un lago de aguas quietas, donde solo se mueve el bote.

Desde que cae la bombona (que queda flotando inmóvil si se observa en este sistema de referencia), el bote se mueve durante 20 minutos aguas arriba y otros 20 minutos agua abajo. En los 40 minutos, el puente se habría movido 1 km, respecto a la bombona (recuerda que flota inmóvil en el agua), luego la velocidad del puente respecto al agua (o del agua respecto al puente) es 1,5 km h^{-1}.

13.16 Un barco está atracado en un muelle. En t = 0 s, comienza a alejarse con una velocidad $v_b = 2$ m s^{-1}. Un pasajero que se encuentra sobre la cubierta del barco (que mide 150 m), en la proa, se dirige hacia la popa, con una velocidad de 1 m s^{-1} respecto al barco.

Mediante la transformación de Galileo, calcula la velocidad del pasajero respecto al muelle y su posición respecto al mismo, al cabo de 20 s.

Suponemos movimientos rectilíneos en la dirección del eje *x*.
Denominando S'{O', x', y', z'} a un sistema de referencia solidario con el barco y S{O, x, y, x} a un sistema de referencia fijo en el muelle, en t = 0 s, O = O', x = x' = 150 m. La velocidad de desplazamiento de *S'* respecto a *S* es $v_b = 2$ m s^{-1}

$$v_x = v_x' + v_b = -1 + 2 = 1 \text{ m s}^{-1}$$

$$x = x' + v_x\,t = 150 + 1\cdot 20 = 170 \text{ m}$$

$$y' = y;\ z' = z;\ t' = t$$

13.17 Se deja caer un cuerpo en el interior de un ascensor desde una altura de 2 m. Determina a qué altura sobre el suelo del ascensor se encontrará el cuerpo al cabo de 0,5 s en los siguientes casos.

a) El ascensor se encuentra parado.

b) El ascensor sube con un *mru* de velocidad 1 m s^{-1}.

a) Situamos un sistema de referencia en el suelo del ascensor y solidario con este. La altura del objeto al cabo de 0,50 s es:

$$h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 2{,}0 - 4{,}9 \cdot 0{,}50^2 = 0{,}78\,\text{m}$$

b) En este caso, el objeto posee una velocidad inicial hacia arriba de 1,0 m s^{-1}, ya que está subido en el ascensor. En 0,50 s el suelo del ascensor ha subido 0,5 m, luego se ha aproximado al objeto y la altura desde la que caería el objeto sería de 2 – 0,5 = 1,5 m. Aplicando la ecuación de un *mrua*:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 1{,}5 + 1{,}0 \cdot 0{,}50 - 4{,}9 \cdot 0{,}50^2 = 0{,}78\,\text{m}$$

Es evidente que el resultado debe ser el mismo debido al principio de relatividad de Galileo.

13.18 La distancia en línea recta desde Madrid a Palma de Mallorca es 542 km. Calcula el tiempo que tarda un avión en viajar de Madrid a Palma de Mallorca y en volver, si la velocidad del avión respecto al aire es de 400 km h^{-1} en los siguientes casos.

a) Suponiendo que el viento sopla de lado a 60 km h^{-1} en todo el trayecto.

b) Suponiendo que el viento, de 60 km h^{-1}, sopla a favor en la ida y en contra en la vuelta.

a) Si el viento sopla de lado, el avión tendrá que orientarse para contrarrestar la velocidad lateral del viento, de manera que recorrerá la hipotenusa de un triángulo rectángulo con lados 542 km y 60t km, siendo *t* el tiempo de viaje. De esta manera se puede establecer la ecuación:

$$d = v_{máx}\, t = \sqrt{542^2 + 60^2 t^2} = 400\, t$$

$$400^2 t^2 = 542^2 + 60^2 t^2; 156400\, t^2 = 293764 \Rightarrow t = 1{,}37\,\text{h}$$

Puesto que tanto a la ida como a la vuelta el viento afecta de la misma manera, el tiempo de recorrido será el doble: t_{total} = 1,37 · 2 = 2,74 h.

b) En el caso de que el viento sople a favor la primera parte del viaje, la velocidad del avión respecto al suelo será la suma de la del avión respecto al aire y la del viento, proporcionando:

v = 400 + 60 = 460 km h^{-1}

Por tanto, el tiempo del viaje de ida será: $t_{ida} = \frac{542}{460} = 1{,}18\,\text{h}$

En la vuelta, las velocidades se restan porque el viento frena al avión: v = 400 – 60 = 340 km h^{-1}.
El tiempo del viaje de vuelta será:

$$t_{vuelta} = \frac{542}{340} = 1{,}59\,\text{h}$$

Finalmente, el tiempo total de ida y vuelta con el viento en la dirección del viaje es: t = 2,77 h.

13.19 Un globo aerostático asciende a una velocidad constante de 4 m s^{-1}. Cuando se encuentra a una altura de 50 m, un aeronauta deja caer un objeto.

a) Calcula el tiempo que tarda en llegar al suelo en un sistema de referencia fijo en el suelo.

b) Realiza el mismo cálculo en un sistema de referencia fijo en el globo.

a) Un observador en un sistema de referencia S(x, y, z) con origen fijo *O* en el suelo mide lo siguiente:

- La posición inicial del objeto es y_0 = +50 m.
- La velocidad inicial del objeto que cae es la misma que la del globo, es decir, v_0 = 4 m s^{-1}.
- La aceleración del objeto es a = g = –9,8 m s^{-2}.

La posición del objeto está dada por la ecuación: $y = y_0 + v_0\, t + ½\, a\, t^2 = 50 + 4\, t – 4{,}9\, t^2$

Llegará al suelo cuando y = 0 $\Rightarrow$ 0 = 50 + 4 t – 4,9 t^2 $\Rightarrow$ t = 3,63 s.

b) El aeronauta, observador en un sistema de referencia S'(x', y', z') con origen *O'* en el globo, mide lo siguiente:

- La posición inicial del objeto es $y_0' = 0$ m.
- La velocidad inicial del objeto que cae es $v_0' = 0$ m s^{-1}.
- La aceleración del objeto es $a' = g = -9{,}8$ m s^{-2}.
- El suelo inicialmente está en la posición $y_0' = -50$ m y se aleja del globo con una velocidad constante de $v = -4$ m s^{-1}.

Las posiciones del objeto y del suelo son respectivamente:

$$y' = y_0' + v_0\, t + \tfrac{1}{2}\, a\, t^2 = -4{,}9\, t^2$$

$$y' = y_0' + v\, t = -50 - 4\, t$$

El objeto alcanza el suelo cuando se cumple que ambas posiciones se igualan:

$$-50 - 4\, t = -4{,}9\, t^2 \Rightarrow t = 3{,}63 \text{ s}$$

13.20 Desde un vehículo descapotado, con movimiento rectilíneo uniforme de velocidad v = 20 m s^{-1}, se efectúa un lanzamiento vertical con una velocidad inicial de la bala de 100 m s^{-1}.

a) Determina la posición y la velocidad del objeto lanzado al cabo de 2 s en un sistema de referencia ligado al vehículo, si en t = 0 s el camión se encuentra en el origen y se efectúa en ese momento el disparo.

b) Realiza los mismos cálculos para un sistema de referencia ligado al suelo.

c) ¿Cuál es la trayectoria del objeto en cada caso?

d) ¿Dónde aterrizará el objeto?

a) En un sistema de referencia ligado al camión, el objeto asciende con un *mrua*:

$$y' = y_0' + v_0'\, t + \frac{1}{2} g\, t^2 = 0 + 100\, t - 4{,}9\, t^2$$

$$y'(2) = 100 \cdot 2 - 4{,}9 \cdot 2^2 = 180{,}4 \text{ m}$$

Su velocidad en ese momento es: $v' = v_0' + gt = 100 - 9{,}8 \cdot 2 = 80{,}4 \text{ m s}^{-1}$

b) En este sistema:

$$v_{ox} = 20 \text{ m s}^{-1} \Rightarrow x = x_0 + v_{0x} t = 20 \cdot 2 = 40 \text{ m}$$

$$v_{0y} = 100 \text{ m s}^{-1} \Rightarrow y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 = 100 \cdot 2 - 4{,}9 \cdot 2^2 = 180{,}4 \text{ m}$$

La posición en t = 2 s es (40, 180,4) m

La velocidad del móvil es: $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = 20\vec{i} + (100 - 9{,}8 \cdot 2)\vec{j} = 20\vec{i} + 80{,}4\vec{j}\ \left(\text{m s}^{-1}\right)$

c) En el primer sistema de referencia, la trayectoria es una línea recta. En el segundo, es una parábola.

d) En la caja del camión, porque en ambos casos la velocidad en el eje *x* es la misma que la del camión.

TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ Y CONTRACCIÓN DE LONGITUDES

13.21 Un avión con una longitud propia L_0 = 14 m (número exacto) vuela paralelo al suelo con una velocidad de 600 m s^{-1} (también considerado un número exacto).

a) Determina lo que se ha acortado el avión para un observador fijo en el suelo utilizando la expresión $L = k\, L_0$, siendo $k = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

b) Realiza el mismo cálculo utilizando la fórmula aproximada: $k \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}$

Nota: considera $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1} un número exacto.

a) $k = \sqrt{1 - \frac{600^2}{\left(3 \cdot 10^8\right)^2}} = 0{,}999999999998$; $L = 0{,}999999999998 \cdot 14 = 13{,}99999999972$ m

El avión se ha acortado en 0,028 nm

b) $k \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2} = 0{,}999999999998$; por tanto, el resultado sale lo mismo.

13.22 Un cometa viaja con una velocidad de 220 000 km h^{-1}. Calcula el porcentaje del tamaño de su cola en reposo que mide un observador que se encuentre en la Tierra.

El cometa se mueve a gran velocidad, lo que implica que la visión que se tenga de él estará afectada por ese hecho. La velocidad del cometa en m s^{-1} es v = 61 111 m s^{-1}. El tamaño aparente de un cuerpo que se mueve con cierta velocidad es:

$$L' = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = L\sqrt{1-\frac{61111^2}{9\cdot 10^{16}}} = 0{,}99999998\ L$$

Por tanto, mide el $\frac{L'}{L}\cdot 100 = 99{,}999998\%$.

13.23 Un ejemplo sorprendente de la dilatación del tiempo junto con la contracción de longitud se presenta en la desintegración de partículas inestables como los mesones. Estos mesones se crean en lo alto de la atmósfera por la acción de los rayos cósmicos que llegan a la Tierra procedentes del espacio y alcanzan el nivel del mar en grandes cantidades.

Su velocidad es 0,998c y se desintegran originando un electrón con un periodo de semidesintegración de $2\cdot 10^{-6}$ s después de comenzar su existencia, luego, teóricamente, solo pueden recorrer una distancia de:

$$\mathbf{y = v\ t_0 = 2{,}994\cdot 10^8\ (m\ s^{-1})\cdot 2\cdot 10^{-6}\ (s) = 660\ m}$$

Sin embargo, comienzan a existir a alturas 10 veces mayores. Resuelve este enigma.

Examinando el problema desde el sistema de referencia del mesón, en el que su vida media es $2\cdot 10^{-6}$ s, aunque su vida no se encuentra afectada por el movimiento, su distancia a la Tierra aparece acortada en el factor:

$$\frac{y}{y_0} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Mientras nosotros, situados en tierra, medimos la altura a la cual el mesón comienza a existir como y_0, el mesón la "ve" como *y*. Si hacemos y = 600 m, que es la distancia máxima que el mesón puede recorrer en su propio sistema de referencia a la velocidad de 0,998c antes de desintegrarse, la distancia y_0 en nuestro sistema de referencia es:

$$y_0 = \frac{y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{600}{\sqrt{1-\frac{(0{,}998c)^2}{c^2}}} = 9500\ \text{m}$$

Si examinamos ahora el problema desde el sistema de referencia de un observador situado en el suelo, la altura a la que el mesón se forma es y_0, pero su vida en nuestro sistema de referencia se ha alargado:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2\cdot 10^{-6}}{\sqrt{1-\frac{(0{,}998c)^2}{c^2}}} = 31{,}6\cdot 10^{-6}\ \text{s}$$

En ese tiempo (16 veces mayor que cuando se encuentra en reposo respecto a nosotros) el mesón recorre:

$$y_0 = v\ t = 2{,}994\cdot 108\ (m\ s^{-1})\cdot 31{,}6\cdot 10^{-6}\ (s) = 9500\ m$$

13.24 Aunque la contracción de Lorentz-Fitzgerald es real en el sentido de que es comprobable mediante mediciones adecuadas, una fotografía de un objeto en movimiento relativo muy rápido estaría distorsionada dependiendo de la dirección desde la que se tomara la fotografía y de la relación v/c. Explica este hecho.

La razón es que la luz que alcanza la cámara (o el ojo en su defecto) procedente de las partes del objeto mas alejadas fue emitida antes que la procedente de las partes más próximas. La cámara retrata una imagen en realidad compuesta, ya que el objeto estaba en distintas posiciones cuando partieron de él los distintos elementos de la imagen única que impresiona la película.

Este efecto, altera la visualización de la contracción de Lorentz-Fitzgerald aumentando la longitud aparente del objeto en dirección del movimiento. Debe distinguirse este efecto visual de la propia contracción de Lorentz-Fitzgerald, que es un fenómeno físico (el efecto visual de objetos en movimiento fue descrito en 1959).

13.25 Una caja cúbica con un volumen en reposo de 27 m^3 está sobre un camión que se mueve por una carretera recta a 50 m s^{-1}. Si la velocidad de la luz en el vacío fuese solo de 100 m s^{-1}, ¿cuál sería el volumen aparente de la caja para un observador al pie de la carretera?

En realidad, el camión lleva una velocidad de 0,5c (suponiendo que *c* sea 100 m s^{-1}). Por tanto:

$$L' = L_0\sqrt{1-\frac{(0{,}5c)^2}{c^2}} = 0{,}87\ L_0$$

En el caso que nos ocupa, L_0 = 3 m, por tanto, $L' = 0{,}87 \cdot 3 = 2{,}6$ m, mientras que las otras direcciones no se ven afectadas. El volumen de la caja sería: $V' = L' \cdot L^2 = 2{,}6 \cdot 3^2 = 23{,}4\ m^3$

13.26 Demuestra que una circunferencia de radio unidad que se mueve con velocidad *v* parecerá una elipse a un observador estacionario. Determina la razón entre los ejes menor y mayor de la elipse.

Solo se acorta la dimensión en la dirección del movimiento. Un radio *R* en esa dirección se convierte en Rk (qué sería el semieje *b* de la elipse); sin embargo, el radio perpendicular no se altera (permanece como *R* y sería el semieje *a* de la elipse). Por tanto, la razón entre ambos radios sería:

$$\frac{b}{a} = \frac{Rk}{R} = k = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

13.27 Indica a qué velocidad debe viajar una nave espacial que se dirige a Sirio (estrella que se encuentra a unos 8 años luz de la Tierra) para que la distancia a la estrella se reduzca 100 veces.

En este caso, $L' = \frac{L_0}{100}$. Se cumple que $L' = k\ L_0 \Rightarrow \frac{L_0}{100} = k\ L_0 \Rightarrow k = \frac{1}{100}$

$$k = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow k^2 = 1-\frac{v^2}{c^2} \Rightarrow v^2 = (1-k^2)\ c^2 = \left(1-\frac{1}{10^4}\right)c^2 = 0{,}9999\ c^2 \ \Rightarrow\ v = c\sqrt{0{,}9999} = 0{,}99995\,c$$

13.28 Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Si una nave se mueve respecto a la Tierra a gran velocidad, su longitud aparece aumentada para los tripulantes de la nave.

b) Si una nave se mueve respecto a la Tierra a gran velocidad, su longitud aparece disminuida para los tripulantes de la nave.

c) Si una nave se mueve respecto a la Tierra a gran velocidad, su longitud aparece aumentada para los observadores situados en la Tierra.

d) Si una nave se mueve respecto a la Tierra a gran velocidad, su longitud aparece disminuida para los observadores situados en la Tierra.

e) Desde el sistema de referencia de la nave, se ven los objetos de la Tierra más cortos y desde la Tierra se ve la nave más corta.

Solo son verdaderas la d) y la e).

TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ Y DILATACIÓN DEL TIEMPO

13.29 En un laboratorio se han ajustado dos relojes idénticos para que suene un "tic" cada segundo. Uno de los relojes se mueve con una velocidad 0,6c y el otro se encuentra estacionario. ¿Cuál es el tiempo que transcurre entre dos "tic" del reloj móvil cuando el intervalo es medido por el reloj estacionario?

El tiempo transcurrido entre dos "tic" sucesivos del reloj móvil es:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}6^2}} = 1{,}25\ s$$

13.30 Un satélite se encuentra situado en una órbita geoestacionaria a una altura de 36 000 km sobre la superficie de la Tierra y, por tanto, da una vuelta a esta cada 24 h.

a) ¿Cuánto tardará el reloj del satélite en retrasarse 1 s respecto de los relojes terrestres?

b) Indica alguna situación en la que es necesario tener en cuenta este tipo de retrasos.

a) La velocidad del satélite es:

$$v = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi \cdot \left(3{,}6 \cdot 10^7 + 6{,}36 \cdot 10^6\right)}{86400} = 3080{,}5 \text{ m s}^{-1}$$

El tiempo que transcurre en un sistema en movimiento sigue la siguiente relación:

$$\Delta t = t - t' = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) t = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3080{,}5^2}{9.10^{16}}}\right) t = 5{,}27 \cdot 10^{-11}\ t$$

Por tanto, para que $\Delta t = 1$ deberán pasar:

$$\frac{1}{5{,}27 \cdot 10^{-11}} = 1{,}90 \cdot 10^{10} \text{ s} = 602 \text{ años}$$

b) A pesar de lo pequeño del retraso, es necesario tenerlo en cuenta en los modernos sistemas GPS.

13.31 Indica en cuáles de las siguientes situaciones debe ser tenido en cuenta el fenómeno de la dilatación del tiempo.

a) En la medida de la vida media de las partículas elementales aceleradas a grandes velocidades.

b) En la medida de los tiempos que tardan los coches de *fórmula* 1 en dar las vueltas a los circuitos.

c) En el cronometraje del tiempo de duración de un viaje a la Luna por parte de la estación de seguimiento terrestre.

d) En la sincronización de los relojes terrestres con los que viajan en los satélites de los sistemas GPS.

e) En la medida de los tiempos en las distintas pruebas olímpicas.

Solo en las situaciones a) y d). Para el resto de situaciones, los efectos relativistas son irrelevantes.

13.32 Una nave espacial abandona la Tierra a la velocidad de 0,98c. Determina el tiempo que necesita el minutero de un reloj de la nave en efectuar una revolución completa si la medición la realiza un observador situado en la Tierra.

Una revolución del minutero es, evidentemente, 1 minuto. Es decir, 60 segundos. Para un observador en Tierra, el tiempo en la nave transcurre más lentamente:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{60}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}98c)^2}{c^2}}} = 301{,}5 \text{ s}$$

13.33 El fenómeno de la dilatación del tiempo ha dado origen a la famosa "paradoja de los gemelos", en la que el envejecimiento biológico es el "reloj" en los sistemas *S* y *S'* en movimiento relativo. Supóngase dos hermanos gemelos, uno de los cuales abandona la Tierra a los 15 años en un viaje de ida y vuelta a una estrella que dista 4,4 años luz a una velocidad de 0,8c; por tanto, el tiempo de ida y vuelta es 11 años.

El gemelo que queda en la Tierra habrá envejecido 11 años al regreso del otro. El gemelo viajero, que se ha movido respecto a la Tierra, habrá envejecido en una cantidad: $\Delta t = 11\sqrt{1-0{,}8^2} = 6{,}6$ años

Pero el problema se hace confuso cuando se examina desde el punto de vista del gemelo viajero: para él, la Tierra también se mueve respecto a un sistema de referencia fijo en su propia nave. Como la Tierra "tarda en regresar" 11 años, el navegante habrá envejecido 11 años y el que permanece en la Tierra solo 6,6 años. Resuelve esta aparente paradoja.

Los postulados de la relatividad especial se aplican únicamente a sistemas inerciales de referencia, que son los que se mueven con velocidades constantes unos respecto de otros. En este caso, el astronauta que se ha ido y ha vuelto ha tenido que estar acelerando durante parte del viaje. Esta aceleración se puede detectar y sirve para distinguir entre ambos sistemas de referencia.

Las mediciones de edad no son comparables, puesto que el sistema de la nave espacial no es inercial. Utilizando la teoría general de la relatividad se comprueba que el viajero vuelve 4,4 años mas joven.

13.34 Un hombre con un hermano gemelo abandona la Tierra en una nave espacial para hacer el recorrido de ida y vuelta a una estrella que se encuentra situada a 4 años luz. El viaje se realiza a una velocidad constante de 0,9c.

A su regreso a la Tierra, ¿cuánto tiempo es más joven que su hermano gemelo que permaneció en ella todo el tiempo que ha durado el viaje?

Dato. 1 año-luz = 9,46 · 10^{15} m

La distancia por recorrer en metros para el viaje de ida y vuelta es:

$$e = 4 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{15} \cdot 2 = 7{,}57 \cdot 10^{16}\ \text{m}$$

El tiempo de viaje para el gemelo en tierra es:

$$t = \frac{e}{v} = \frac{7{,}57 \cdot 10^{16}\,(\text{m})}{0{,}9 \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\,(\text{m s}^{-1})} = 2{,}80 \cdot 10^{8}\ \text{s} = 8{,}89\ \text{años}$$

Para el gemelo que viaja, el tiempo transcurrido es:

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ \Delta t = \sqrt{1 - \frac{(0{,}9c)^2}{c^2}}\ 8{,}89 = 3{,}88\ \text{años}$$

Por tanto, el gemelo en Tierra es 8,89 – 3,88 = 5,01 años más viejo.

COMPOSICIÓN RELATIVISTA DE VELOCIDADES

13.35 Una nave se aleja de la Tierra a una velocidad de 0,8c. En un momento dado, la nave dispara un proyectil en su misma dirección y sentido, que se mueve respecto a la nave a una velocidad de 0,6c. Determina con qué velocidad se mueve el proyectil respecto a Tierra.

No se pueden sumar sin más las velocidades, porque se obtendría una velocidad de 1,4c, cosa imposible. Se debe emplear la fórmula de composición relativista de velocidades. Sea v = 0,8c la velocidad de la nave respecto a Tierra y $v'_x = 0{,}6c$ la velocidad del objeto respecto a la nave; entonces, la velocidad del objeto respecto a Tierra es:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v\,v'_x}{c^2}} = \frac{0{,}8c + 0{,}6c}{1 + \frac{0{,}8c \cdot 0{,}6c}{c^2}} = 0{,}95c$$

13.36 Desde la Tierra pueden verse dos galaxias que se alejan de nosotros en direcciones opuestas con una velocidad de 0,6c cada una. Averigua la velocidad con la que se alejan una de otra.

Hay que aplicar la ecuación de composición relativista de velocidades, para poder ver la velocidad de una galaxia tomando a la otra como sistema de referencia:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v \cdot v'_x}{c^2}} = \frac{0{,}6c + 0{,}6c}{1 + \frac{0{,}6c \cdot 0{,}6c}{c^2}} = \frac{1{,}2c}{1{,}36} = 0{,}88c$$

13.37 Un hombre situado en la Luna observa que dos naves espaciales se dirigen hacia él en sentidos opuestos a velocidades de 0,7c y 0,6c respectivamente. ¿Cuál es la velocidad relativa de las dos naves medida por un observador en cualquiera de ellas?

Utilizando de nuevo la fórmula de composición relativista de velocidades:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v \cdot v'_x}{c^2}} = \frac{0{,}7c + 0{,}6c}{1 + \frac{0{,}7c \cdot 0{,}6c}{c^2}} = \frac{1{,}3c}{1{,}42} = 0{,}92c$$

13.38 Comprueba que, cuando se utiliza la transformación de Lorentz, la velocidad de la luz, *c*, es la misma en un sistema de referencia *S* y en otro *S'* que se mueve con velocidad *v* respecto a *S*.

Aplicamos la fórmula relativista de suma de velocidades. Sea v_x la velocidad de un móvil en el sistema de referencia *S*, y v'_x, su velocidad en un sistema de referencia *S'*. Se cumple que: $v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v\, v_x}{c^2}}$

En nuestro caso, $v_x = c$, luego:

$$v'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{v\, c}{c^2}} = \frac{c - v}{c^2 - v\, c}\, c^2 = c$$

Por tanto, la velocidad de la luz no depende del sistema de referencia donde se mida.

DINÁMICA RELATIVISTA. EQUIVALENCIA MASA-ENERGÍA

13.39 Un neutrón, cuya masa en reposo es $1{,}675 \cdot 10^{-27}$ kg se acelera hasta que su masa es cuatro veces la del reposo.

a) ¿Cuál es la energía cinética del neutrón?

b) Tenemos ahora 10^{14} de estos neutrones que se frenan desde la situación citada hasta el reposo. ¿Cuántas bombillas de 100 W podrán lucir con la energía de esos neutrones durante un segundo?

a) La energía cinética relativista es:

$$E_c = m\,c^2 - m_0\,c^2 = 4\,m_0\,c^2 - m_0\,c^2 = 3\,m_0\,c^2$$

$$E_c = 3 \cdot 1{,}675 \cdot 10^{-27} \cdot (3{,}00 \cdot 10^8)^2 = 4{,}52 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

b) Si se frenan hasta el reposo, y toda su energía cinética se pudiera transformar en energía eléctrica, se obtendría:

$$4{,}52 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{14} = 4{,}52 \cdot 10^4\ \text{J}$$

Como 1 W es la transferencia de 1 J de energía por segundo, lucirían:

$$\frac{4{,}52 \cdot 10^4}{100} = 452 \text{ bombillas durante 1 segundo}$$

13.40 Expresa la energía total de una partícula en función de su momento lineal relativista.

El momento lineal relativista es:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow p^2 = \frac{m_0{}^2 v^2}{1 - v^2/c^2} \Rightarrow v^2 = \frac{p^2c^2}{m_0^2c^2 + p^2}$$

La energía total es:

$$E = mc^2 \Rightarrow E^2 = m^2c^4 = \frac{m_0^2c^4}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_0^2c^6}{c^2 - v^2} = \frac{m_0^2c^6}{c^2 - \dfrac{p^2c^2}{m_0^2c^2 + p^2}} = m_0^2c^4 + p^2c^2$$

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$$

13.41 En el acelerador de partículas del CERN se tienen protones de es 1,67 · 10^{-27} kg moviéndose a velocidades de 0,9c dentro de unos tubos.

Averigua la masa que tendrán que utilizar los científicos en sus cálculos para evitar que se choque con las paredes.

La ecuación que hay que utilizar es la de la masa relativista:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{1 - 0{,}9^2}} = 3{,}83 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

13.42 Una partícula tiene una energía cinética de 62 MeV y una cantidad de movimiento de 1,75·10^{-19} kg m s^{-1}. Determina su masa en reposo y su velocidad.

Se supone que es necesario utilizar fórmulas relativistas.
La energía cinética relativista es:

$$E_C = m\,c^2 - m_0\,c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{k} - 1\right)$$

donde $k = \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$, lo que implica que $v = c\sqrt{1 - k^2}$

La cantidad de movimiento relativista es:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{k} m_0 v = \frac{m_0 c\sqrt{1 - k^2}}{k}$$

Dividiendo la energía cinética por el momento lineal multiplicada por *c*:

$$\frac{E_c}{pc} = \frac{1 - k}{\sqrt{1 - k^2}}$$

Sustituyendo los valores conocidos, se tiene:

$$\frac{E_c}{pc} = \frac{62 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6}{1{,}75 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^8} = 0{,}189$$

$$\frac{(1-k)^2}{\left(\sqrt{1 - k^2}\right)^2} = \frac{1 - k}{1 + k} = 0{,}189^2 = 0{,}036 \text{ ; } k = 0{,}93 \Rightarrow v = c\sqrt{1 - k^2} = c\sqrt{1 - 0{,}93^2} = 0{,}37c$$

$$m_0 = \frac{k\,p}{v} = \frac{0{,}93 \cdot 1{,}75 \cdot 10^{-19}}{0{,}37 \cdot 3{,}00 \cdot 10^8} = 1{,}47 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

13.43 Calcula a qué velocidad tiene que moverse un cuerpo para que su energía total sea el doble de la que tenía en reposo.

La ecuación que indica la energía total de un cuerpo es:

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$$

La energía en reposo es:

$$E_0 = m_0c^2$$

Si la energía tiene que valer el doble, tenemos que:

$$(2m_0c^2)^2 = 4m_0^2c^4 = m_0^2c^4 + p^2c^2 \Rightarrow 3m_0^2c^2 = p^2$$

Desarrollando, se obtiene que:

$$p = \sqrt{3}\, m_0\, c = \frac{m_0\, v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ 3\, c^2 = \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{v^2}{c^2}\ ;\ \frac{3}{4} = \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

13.44 ¿Qué masa tendrá un cuerpo que en reposo tiene una masa de 40 kg, cuando viaja con una velocidad de 0,5c?

La masa de un cuerpo sigue la relación:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{40}{\sqrt{1-0{,}5^2}} = 46{,}2\,\text{kg}$$

13.45 Un cuerpo *C* de masa *m* se mueve con velocidad constante *v* (v << c), posee un momento lineal (cantidad de movimiento) *p* y una longitud de onda de De Broglie asociada λ. Por analogía con los fotones, se asocia a la onda de *C* una frecuencia ν dada por:

$$\nu = \frac{\textbf{energía de C}}{\textbf{h}} = \frac{\textbf{mv}^2}{\textbf{2h}}$$

Teniendo en cuenta que $\lambda = \frac{v}{\nu}$, resulta entonces que $\lambda = \frac{2h}{p}$, en desacuerdo con la ecuación de De Broglie.

a) ¿Cuál es el fallo del razonamiento que motiva este desacuerdo?

b) Subsanado el fallo, calcula la velocidad *v* con la que se propaga la onda material del cuerpo *C*.

a) La relación de De Broglie indica que $\lambda = \frac{h}{p}$. El origen de la divergencia entre esta ecuación y la del enunciado se debe a que la energía cinética que hay que tomar es la relativista, ya que la masa varía con la velocidad. En el caso de los fotones, la masa en reposo es nula y entonces su momento lineal se puede expresar como p = mc, y su energía como $E = mc^2$, donde la masa *m* es la masa relativista.

En el caso de la energía cinética clásica, la ecuación que se emplea es $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, en la que la masa es la masa en reposo.

Por tanto, en los fotones se tiene que E = hν = pc y, por tanto, $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{h}{p}$.

De Broglie aplicó esta expresión a todo tipo de partículas.

b) Del propio enunciado, se tiene que:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

13.46 Di si es cierto o falso el siguiente argumento y razona la respuesta: “El fotón, debido a su velocidad, posee cantidad de movimiento”.

El fotón posee cantidad de movimiento debido a que tiene energía y a que la energía cinética está relacionada con la cantidad de movimiento según la ecuación:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

La afirmación es falsa, porque el enunciado da a entender que tiene energía por tener masa en reposo.

13.47 Una partícula de masa en reposo m_0 = 2,4 · 10^{-28} kg viaja con una velocidad v = 0,8c, siendo *c* la velocidad de la luz en el vacío. ¿Cuál es la relación entre su energía cinética relativista y su energía cinética clásica?

Su energía cinética clásica es:

$$E_c = \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0(0{,}8c)^2 = 0{,}32\ m_0c^2$$

La energía cinética relativista es:

$$E_{rel.} = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2 = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0\right)c^2 = 0{,}67\ m_0c^2$$

$$\frac{E_{rel.}}{E_c} = \frac{0{,}67}{0{,}32} = 2{,}1$$

13.48 En un cristal las moléculas se encuentran quietas en ciertas posiciones, mientras que en un gas se mueven a gran velocidad. ¿Aumenta la masa de un cuerpo al pasar de sólido a gas?

La masa de los cuerpos aumenta cuando la velocidad de sus átomos o moléculas aumenta. En un gas las moléculas se mueven mucho más rápidamente que en un cristal y, por tanto, la masa de cada molécula será mayor en estado gaseoso y, en consecuencia, mayor será la masa de todo el cuerpo.

13.49 ¿A qué velocidad debe moverse un electrón para que su masa sea igual a la del protón?

Datos. m_e = 9,1 · 10^{-31} kg; m_p = 1,7 · 10^{-27} kg

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{m}{m'} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\left(\frac{9{,}1\cdot10^{-31}}{1{,}7\cdot10^{-27}}\right)^2 = 1-\frac{v^2}{c^2}$$

$$2{,}9\cdot10^{-7} = 1-\frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1-2{,}9\cdot10^{-7}$$

$$v = 2{,}99999\cdot10^8\,\text{m s}^{-1} \approx 3{,}0\cdot10^8\ \text{ms}^{-1}$$

PROBLEMA DE SÍNTESIS

13.50 Los agujeros negros son objetos que se describen mediante modelos teóricos. Se trata de restos procedentes de catástrofes estelares. Cuando una estrella muy másica experimenta una explosión tipo supernova, si el resto estelar (sus capas más internas) es superior a 1,4 masas solares, debido a la fuerza gravitatoria, experimenta un proceso de conversión en agujero negro (también llamado estrella congelada).

La materia estelar *desaparece* dentro de una esfera imaginaria llamada "horizonte de sucesos", de forma que nada, ni siquiera la luz, puede escapar del interior de dicho horizonte. En ese sentido, se trataría de un objeto perfectamente negro, pues absorbería toda la luz o materia que estuviese en sus alrededores y no emitiría ningún tipo de radiación o materia.

Si se pudiera observar el acercamiento de un objeto al horizonte de sucesos, se comprobaría que este es acelerado hasta la velocidad de la luz, a la cual alcanzaría justo en el horizonte de sucesos. Pero esta velocidad es un límite inalcanzable de la física.

a) Busca información sobre el efecto de "marea gravitatoria" que se experimentaría cerca del agujero negro.

b) Busca información, teniendo en cuenta la teoría de la relatividad, sobre como sería el viaje a un agujero negro desde el punto de vista del viajero que va hacia él y desde el punto de vista de un observador alejado del agujero negro.

a) La llamada marea gravitatoria consiste en la diferencia de fuerzas de atracción gravitatoria que el agujero negro ejerce entre puntos relativamente próximos entre si, pero a diferente distancia del horizonte de sucesos. Un ejemplo sería la diferente fuerza gravitatoria ejercida sobre los pies y la cabeza de la persona (separados menos de 2 m).

Esta marea sería muy intensa y deformaría a los objetos que se aproximaran al horizonte de sucesos, estirándolos en dirección radial con el centro del agujero negro. Ese espacio-tiempo se encuentra especialmente curvado cerca de los agujeros negros.

b) Desde el punto de vista de un observador alejado del agujero, la nave viajera se aproximaría al horizonte de sucesos acelerando su velocidad hasta cerca de la de la luz. Este observador externo comprobaría que los relojes de la nave atrasan respecto del suyo.

Desde el punto de vista de un viajero de la nave, las cosas transcurren de forma totalmente diferente. El viajero no observa desde su sistema de referencia ninguna ralentización de su propio reloj y, si antes no ha sido destruido por las fuerzas de marea, podría determinar su paso a través del horizonte de sucesos del agujero negro.