2 Cinemática y dinámica

EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1 Un proyectil se mueve de forma que su vector de posición en cada instante es:

$$\vec{r} = 375t\cos 25^\circ\,\vec{i} + (375t\,\text{sen}\,25^\circ - 4{,}9\,t^2)\,\vec{j}$$

Calcula la velocidad en cada instante, el alcance y el tiempo de vuelo.

Para determinar la velocidad se hace la derivada de la posición: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 375\cos 25^\circ\,\vec{i} + (375\,\text{sen}\,25^\circ - 9{,}8\,t)\,\vec{j}$

El movimiento se corresponde con una trayectoria parabólica con velocidad inicial 375 m s^{-1} y una aceleración de la gravedad de 9,8 m s^{-2}.

El tiempo de vuelo se obtiene calculando el tiempo para el que y = 0; $y = 375t\,\text{sen}\,25^\circ - 4{,}9t^2 = 0$

Las soluciones son: t = 0 y $t = \frac{375\,\text{sen}\,25^\circ}{4{,}9} = 32{,}3$ s

El alcance se obtiene sustituyendo este valor en la componente horizontal:

$$x = 375\,t\cos 25^\circ = 375 \cdot 32{,}3 \cdot \cos 25^\circ = 1{,}1 \cdot 10^4\ \text{m}$$

2.2 Obtén la expresión del módulo de la velocidad en un *mcu* y comprueba que es constante en el tiempo, por lo que la aceleración tangencial es cero.

La velocidad de una partícula con *mcu* cuya posición viene definida por: $\vec{r} = R\cos\omega t\,\vec{i} + R\,\text{sen}\,\omega t\,\vec{j}$

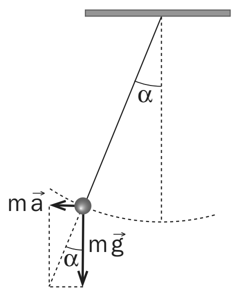
Su velocidad es: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega R\,\text{sen}\,\omega t\,\vec{i} + \omega R\cos\omega t\,\vec{j}$

Su módulo será: $|\vec{v}| = \sqrt{\omega^2R^2\,\text{sen}^2\,\omega t + \omega^2R^2\cos^2\omega t} = \sqrt{\omega^2R^2} = \omega R$

La aceleración tangencial es la derivada del módulo de la velocidad: $a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = 0$

El módulo de la velocidad no varía con el tiempo, así que la aceleración tangencial será nula.

2.3 Del techo de un tren que viaja con *mru* a una velocidad de 180 km h^{-1}, cuelga una lámpara. Cuando el tren comienza a frenar, el cable que la sujeta forma un ángulo de 10º con la vertical, que se mantiene constante durante toda la frenada. ¿Qué distancia ha recorrido el tren mientras se detenía?



Resolviendo el problema desde el sistema inercial exterior al tren, se puede apreciar que se observan dos fuerzas: la tensión del cable y el peso de la lámpara. Como se puede observar en la figura, la suma de ambas se corresponderá con el producto de la masa por la aceleración que actúa en sentido contrario a su velocidad.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{ma}{mg} \Rightarrow a = g \cdot \text{tg}\,10^\circ = 1{,}73\ \text{m s}^{-2}$$

La velocidad inicial del tren es: $v_0 = 180\ \text{km h}^{-1} = 50\ \text{m s}^{-1}$

El movimiento del tren será: $v = v_0 - a\,t$; sustituyendo los valores, se tiene:

$$v = 50 - 1{,}73\,t$$

Cuando se detenga se tendrá: v = 0, así que: $t = \frac{50}{1{,}73} = 28{,}9$ s

La distancia recorrida sería: $r = v_0t - \frac{1}{2}at^2 = 50 \cdot 28{,}9 - \frac{1}{2}1{,}73 \cdot 28{,}9^2 = 722$ m

2.4 Demuestra que, si el momento de las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, su trayectoria está contenida en un plano.

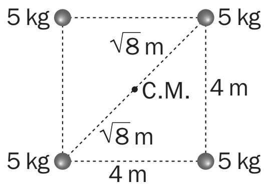
Si el momento de las fuerzas que actúan es cero, se tiene que el momento angular será constante. Dado que $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ es perpendicular al plano formado por la velocidad y por la posición de la partícula, se tiene que la trayectoria no podrá salir de este plano.

2.5 Calcula el momento de inercia con respecto al centro de masas de un sistema de cuatro masas iguales de 5 kg cada una, colocadas en los vértices de un cuadrado de 4 m de lado.

El momento de inercia de un sistema se define como: $I = \sum_i m_i r_i^2$

En la figura se puede ver que las masas y distancias son iguales, así que el momento de inercia será:

$$I = 4 \cdot 5 \cdot \left(\sqrt{8}\right)^2 = 160 \text{ kg m}^{-2}$$



2.6 Calcula el momento de inercia de una esfera maciza de 20 cm de radio y 275 g que gira en torno a su eje de simetría.

Aplicando la expresión del momento de inercia de una esfera alrededor de un diámetro, se tiene:

$$I_{esfera} = \frac{2}{5}mr^2 = \frac{2}{5} \cdot 0{,}275 \cdot 0{,}2^2 = 4{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

2.7 Los ciclistas en algunas pruebas utilizan la rueda tradicional de llanta y radios, que se puede asemejar a un anillo, pero en otras utilizan la rueda lenticular, más parecida a un disco. Si ambas tienen la misma masa, ¿cuál será más fácil de poner en movimiento?

El momento de inercia de un disco es menor que el de un anillo de igual masa, por lo que la rueda lenticular será más fácil de poner en movimiento.

2.8 Sobre la llanta de una rueda de bicicleta de 200 g de masa y 310 mm de radio, que está girando a 360 *rpm*, actúan las zapatas de freno, de manera que se detiene en 1,2 s. Calcula la fuerza de rozamiento que la ha frenado.

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación, se tiene: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{frenado} = I\,\vec{\alpha}$

Se calcula la aceleración angular de la rueda teniendo en cuenta que: $\alpha = \dfrac{\omega - \omega_0}{t} = \dfrac{0 - 360\,\frac{2\pi}{60}}{1{,}2} = -31{,}4 \text{ s}^{-2}$

El momento de inercia de la rueda es: $I = m\,R^2 = 0{,}2 \cdot 0{,}31^2 = 1{,}92 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$

El módulo de la fuerza de frenado será: $F = \dfrac{1{,}92 \cdot 10^{-2} \cdot 31{,}4}{0{,}31} = 1{,}94 \text{ N}$

2.9 La plataforma de un tiovivo de 250 kg de masa y 3 m de radio puede considerarse como un gran disco girando a 6 *rpm*. Con el motor desconectado y en ausencia de rozamiento, una persona de 70 kg de masa salta radialmente desde el exterior al borde de la plataforma. ¿Cuál será la nueva velocidad del carrusel?

Puesto que no hay momentos exteriores, el momento angular del sistema ha de permanecer constante; por lo tanto, se tiene:

$$I_{plat}\,\omega_0 = I_{plat+oper}\,\omega_f \Rightarrow \omega_f = \omega_0 \frac{I_{plat}}{I_{plat+oper}}$$

El momento de inercia de la plataforma es: $I_{plat} = \dfrac{1}{2}mR^2 = \dfrac{1}{2} 250 \cdot 3^2 = 1125 \text{ kg m}^2$

El momento de inercia con el operario es: $I = I_{plat} + m\,r^2 = 1125 + 70 \cdot 3^2 = 1755 \text{ kg m}^2$

Sustituyendo los valores, se tiene: $\omega_f = 6 \cdot \dfrac{1125}{1755} = 3{,}85$ *rpm*

2.10 Un patinador sobre hielo, cuyo momento de inercia máximo (brazos en cruz) es de 21 kg m^2, está girando con una velocidad angular de 6π rad s^{-1}. Calcula la velocidad de giro cuando adopta una posición cuyo momento de inercia es de 5,4 kg m^2.

En este sistema se conserva el momento angular, de manera que se cumple la siguiente relación:

$$I_0\ \omega_0 = I_f\ \omega_f \Rightarrow \omega_f = \omega_0 \frac{I_0}{I_f} = 6\pi \frac{21}{5,4} = 23,3\pi \text{ rad s}^{-1}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

CINEMÁTICA

2.11 Una partícula se mueve a lo largo del eje *x*, de tal manera que su posición en cada instante está dada en unidades del SI por la expresión: x = 3t^2 – 5t – 8. Calcula:

a) El tiempo transcurrido hasta que la partícula adquiera una velocidad de 2 m s^{-1}.

b) La posición que alcanza en ese momento.

c) La aceleración que lleva en ese instante.

a) La velocidad en cada instante se obtiene derivando el vector posición:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6t - 5)\vec{i}$$

Cuando la velocidad se hace igual a 2 m s^{-1}, se tiene: 2 = 6 t – 5 $\Rightarrow$ t = 1,2 s

b) La posición se obtiene sustituyendo:

$$x = 3 \cdot 1,2^2 - 5 \cdot 1,2 - 8 = -9,7 \text{ m}$$

c) La aceleración se obtiene derivando la velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\vec{i}\ (\text{m s}^{-2})$$

2.12 Una partícula que se mueve según un tiro parabólico, tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$\vec{r} = 7t\vec{i} + (7t - 4,9t^2)\vec{j}$$

Calcula:

a) La aceleración normal en el punto más alto de su trayectoria.

b) El radio de curvatura de la misma, en ese instante.

a) La velocidad de la partícula es:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 7\vec{i} + (7 - 9,8t)\vec{j}$$

La aceleración será: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -9,8\ \vec{j}\ (\text{m s}^{-2})$

En el punto más alto de la trayectoria, la velocidad en el eje vertical es nula, así que la velocidad y la aceleración de la gravedad son perpendiculares, lo que indica que toda la aceleración será normal.

b) Dado que se cumple que: $a_n = \frac{|v|^2}{R} \Rightarrow R = \frac{|v|^2}{a_n}$

Sustituyendo la velocidad en el punto más alto, se tiene:

$$R = \frac{7^2}{9,8} = 5 \text{ m}$$

2.13 En un movimiento circular de radio r = 6,5 m la velocidad angular viene dada por ω = 2 + 3t (en unidades del SI).

a) ¿Se trata de un movimiento circular uniformemente acelerado? ¿Por qué?

b) Calcula la aceleración tangencial y la aceleración normal del punto móvil en el instante t = 3 s.

c) Determina la longitud del arco recorrido en los dos primeros segundos del movimiento.

a) Sí, porque la velocidad angular crece linealmente con el tiempo:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 3 \text{ rad s}^{-2}$$

b) La aceleración tangencial es: $a_t = \alpha R = 3 \cdot 6{,}5 = 19{,}5 \text{ m s}^{-2}$

La aceleración normal es:

$$a_n = \frac{|v|^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

Sustituyendo para t = 3 s:

$$a_n = (2 + 3 \cdot 3)^2\ 6{,}5 = 786{,}5 \text{ m s}^{-2}$$

c) El arco recorrido es igual al producto del ángulo barrido por la longitud del radio: $l = \varphi R$

Donde:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} 3 \cdot 2^2 = 10 \text{ rad}$$

Sustituyendo: $l = 10 \cdot 6{,}5 = 65$ m

2.14 El electrón de un átomo de hidrógeno en estado fundamental describe alrededor del núcleo una órbita circular de $5 \cdot 10^{-11}$ m de radio con un período de $1{,}43 \cdot 10^{-16}$ s. Calcula la aceleración de su movimiento.

De la expresión de la aceleración normal, se tiene:

$$a_n = \frac{|v|^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R = \frac{4\pi^2}{\left(1{,}43 \cdot 10^{-16}\right)^2}\ 5 \cdot 10^{-11} = 9{,}65 \cdot 10^{22} \text{ m s}^{-2}$$

2.15 Un móvil se mueve sobre el eje *x* de tal manera que su posición viene dada por la ecuación:

$$\mathbf{x = 2{,}25 + 4t - t^2}$$

a) ¿En qué instante está parado?

b) ¿Cuándo pasa por el origen?

c) ¿Cuál es el alejamiento máximo en el sentido positivo del eje?

a) Se calcula la velocidad derivando la ecuación del vector de posición:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4 - 2t$$

Despejando, se tiene que el móvil se parará en: $0 = 4 - 2t \Rightarrow t = 2$ s

b) Pasa por el origen (x = 0) en el instante: $0 = 2{,}25 + 4t - t^2$

La ecuación de segundo orden tiene dos soluciones: t = –0,5 s y t = 4,5 s

Pasó por el origen 0,5 s antes de iniciar la medida del tiempo y vuelve a pasar en el instante 4,5 s.

c) La distancia máxima se tendrá cuando la velocidad sea nula, así que t = 2 s.

Sustituyendo: x = 2,25 + 4 · 2 – 2 · 2 = 6,25 m

2.16 Una partícula describe una circunferencia de radio *R* de tal manera que la longitud del arco recorrida en cada instante es $l = \frac{1}{2}a_0t^2 - v_0t$, donde a_0 y v_0 son constantes. Calcula:

a) La aceleración tangencial y normal en el instante *t*.

b) La aceleración angular en función del tiempo.

a) El módulo de la velocidad es:

$$v = a_0t - v_0$$

Por tanto, la aceleración tangencial será:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = a_0$$

La aceleración normal será:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(a_0t - v_0)^2}{R}$$

b) La aceleración tangencial está relacionada con la aceleración angular por:

$$a_t = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{a_0}{R}$$

2.17 Un móvil tiene una ecuación de movimiento definida por:

$$\vec{r} = 5t^2\vec{i} + 2\vec{j} + (3t^2 - 7)\vec{k}$$

Estudiando las componentes intrínsecas de la aceleración, se comprueba que se trata de un movimiento rectilíneo.

Se calcula la velocidad y la aceleración:

$$\vec{v} = 10t\ \vec{i} + 6t\ \vec{k} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{136}\ t\ \text{m s}^{-1} \Rightarrow \vec{a} = 10\vec{i} + 6\vec{k} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{136}\ \text{m s}^{-2}$$

La aceleración tangencial es:

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \sqrt{136}\ \text{m s}^{-2}$$

Dado que la aceleración tangencial es igual a la aceleración total, se tiene que $a_n = 0$.

Un móvil en el que la aceleración normal es nula no varía de dirección y, por tanto, describirá un movimiento rectilíneo.

PRINCIPIOS DE LA DINÁMICA

2.18 Un imán de 25 g de masa y un clip de 0,1 g se atraen con una fuerza que depende de la distancia que los separa. Si ambos están sobre un plano horizontal sin rozamiento, cuando están a 5 cm, el clip se aproxima al imán con una aceleración instantánea de 15 m s^{-2}. ¿Con qué aceleración se aproxima el imán hacia el clip?

Por aplicación del tercer principio de la dinámica, la fuerza de atracción entre el imán y el clip es la misma en los dos elementos interaccionantes. Es decir: $F_{imán} = F_{clip}$. Por tanto: $m_i\ a_i = m_c\ a_c$

Despejando y sustituyendo, se tiene:

$$a_i = \frac{m_c a_c}{m_i} = \frac{0{,}1 \cdot 15}{25} = 0{,}06\ \text{m s}^{-2}$$

2.19 Una persona de 65 kg de masa permanece sobre una balanza que se apoya en el suelo de un ascensor que sube con:

1. Velocidad constante.

2. Aceleración de 1,2 m s^{-2}.

3. Aceleración de –1,2 m s^{-2}.

Contesta a las siguientes preguntas, para cada caso anterior:

a) ¿Qué lecturas hace la persona sobre la balanza?, ¿se corresponden con su peso?

b) ¿A qué se deben las diferencias de peso observadas por el viajero?

c) ¿Cómo las interpreta una persona que permanece en reposo en el exterior del ascensor?

a) Las lecturas de la balanza serán:

1. p = m g = 65 · 9,8 = 637 N

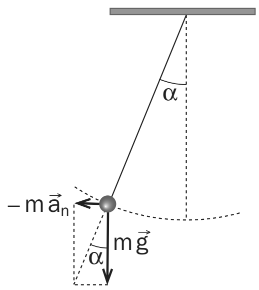
2. p = m (g + a) = 65 · (9,8 + 1,2) = 715 N

3. p = m (g + a) = 65 · (9,8 – 1,2) = 559 N

b) Las diferencias que observa el viajero las justificará por la presencia de fuerzas de inercia, debido a la aceleración a la que está sometido en su sistema de referencia.

c) Una persona en el exterior las interpretará como el resultado de la aceleración real a la que está sometido el viajero, que es la suma de la de la gravedad y la del ascensor.

2.20 Un péndulo cuelga del techo de un tranvía que viaja a 36 km h^{-1}. ¿Qué ángulo formará el hilo con la vertical si el tranvía describe una curva de 50 m de radio?

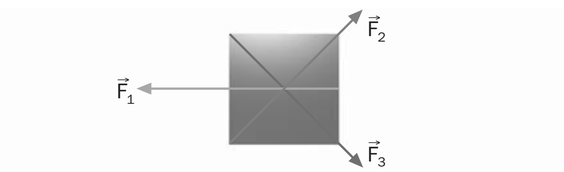


En la figura, se puede observar que: $\text{tg}\alpha = \dfrac{ma}{mg} = \dfrac{a_n}{g}$

La aceleración normal será: $a_n = \dfrac{|v|^2}{R} = \dfrac{100}{50} = 2 \text{ m s}^{-2}$

Por lo tanto, el ángulo será: $\alpha = \text{arctg}\left(\dfrac{2}{9{,}8}\right) = 11{,}5º$

2.21 Sobre una plancha cuadrada rígida actúan tres fuerzas, tal y como se indica en la figura. Si F_3 = 10 N, calcula F_1 y F_2 para que la plancha permanezca en equilibrio.



La condición de equilibrio es que la suma de las fuerzas y de los momentos sea cero. La suma de los momentos es cero, puesto que las fuerzas son concurrentes en el centro, de manera que los momentos de cada una son cero.

Para que la suma de las fuerzas sea cero, es necesario que se cumpla el equilibrio en el eje *y*:

$$F_{2y} = -F_{3y}, \text{ por tanto: } F_2 = F_3$$

Por otra parte, se tiene que cumplir el equilibrio en la componente *x* que:

$$F_1 = F_3 \cos 45º + F_2 \cos 45º = 2\, F_3 \cos 45º = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}707 = 14 \text{ N}$$

Por tanto: F_2 = 10 N y F_1 = 14 N

2.22 Un granizo de 1 g de masa se desprende de la nube y comienza a caer con aceleración constante igual a *g*. La fuerza de rozamiento del granizo con el aire va aumentando con la velocidad del mismo, de manera que, superado un valor mínimo, llega al suelo con una velocidad constante de 30 m s^{-1}. Independientemente de la altura desde la que caiga, ¿cuánto vale la fuerza de rozamiento del granizo con el aire a esa velocidad?

Si el granizo llega con velocidad constante al suelo, independientemente de cual sea la álturo debido a que la fuerza de rozamiento con el aire iguala al peso del granizo. Por tanto: $F_{roz} = mg = 0{,}001 \cdot 9{,}8 = 9{,}8 \cdot 10^{-3}$ N

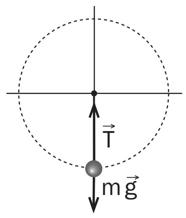
2.23 Una piedra está atada en el extremo de una cuerda de 0,5 m de longitud y gira en un plano vertical con un movimiento que se puede considerar como circular uniforme. Calcula la velocidad angular máxima que se puede dar a la piedra si se sabe que la cuerda se rompe cuando la tensión es 10 veces el peso de la piedra.

El punto más crítico para la cuerda es el punto inferior, en el que debe soportar el peso de la piedra y además proporcionar la aceleración centrípeta necesaria para el movimiento circular. Luego:

$$T_{máx} = m\,g + F_N = 10\,m\,g. \text{ Por tanto: } F_n = 9\,m\,g \text{ y } a_n = 9g$$

Se tiene, pues:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \Rightarrow \omega_{máx} = \sqrt{\frac{9g}{R}} = 13{,}3 \text{ rad s}^{-1}$$



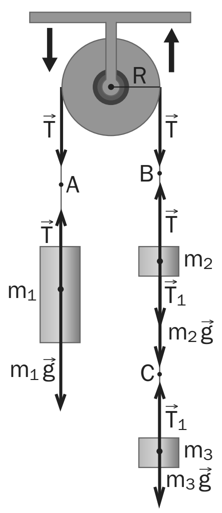
2.24 Se dispone de una polea y tres cuerpos de masas m_1 = 3 kg y $m_2 = m_3$ = 1 kg, dispuestos tal y como indica la figura. Si se consideran despreciables las masas de las cuerdas y de la polea, y no hay rozamiento:

a) Dibuja las fuerzas ejercidas sobre cada cuerpo.

b) Calcula la aceleración de cada uno de los tres cuerpos.

c) Calcula las tensiones de las cuerdas en los puntos *A*, *B* y *C*.

a)



b) La aceleración queda determinada por la suma de fuerzas dividida por la suma de masas, de manera que tenemos una aceleración:

$$a = \frac{m_1 g - m_2 g - m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(3 - 1 - 1) \cdot 9{,}8}{3 + 1 + 1} = 2 \text{ m s}^{-2}$$

c) Las tensiones se pueden determinar con la segunda ley de Newton ayudados por la figura.

Para el punto *A*, hay que utilizar la ecuación de movimiento para m_1.

$$m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a;\ T = m_1 \cdot (g - a) = 3 \cdot (10 - 2) = 24 \text{ N}$$

Por simetría, la tensión en *B* tiene que ser también 24 N.

Numéricamente, se obtiene que:

$$T - (m_2 + m_3)\,g = (m_2 + m_3) \cdot a;\ T = (m_2 + m_3) \cdot (g + a)$$

$$T = (1 + 1) \cdot (10 + 2) = 24 \text{ N}$$

Finalmente, para el punto *C* tenemos la siguiente ecuación:

$$T_1 - m_3 \cdot g = m_3 \cdot a;\ T_1 = m_3 \cdot (g + a) = 1 \cdot (10 + 2) = 12 \text{ N}$$

2.25 Un muelle de constante $k = 50\ N\ m^{-1}$ y longitud natural $l_0 = 2$ m está atado al techo de un ascensor. Si colgamos del extremo libre del muelle un cuerpo de 3 kg, ¿cuál será la longitud del muelle en los siguientes casos?

a) Cuando el ascensor suba con una aceleración igual a $2\ m\ s^{-2}$ en el sentido del movimiento.

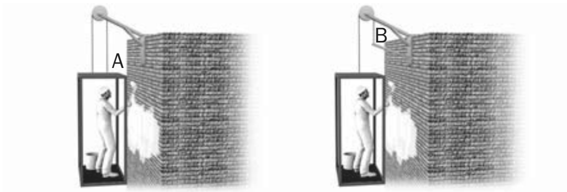
b) Cuando el ascensor suba a una velocidad constante.

a) Al subir el ascensor, la aceleración de la gravedad y la del ascensor se sumarán para aumentar la carga aplicada al muelle, de manera que se tendrá: $\Delta l = \frac{m\,(g+a)}{k} = \frac{3\,(9{,}8+2)}{50} = 0{,}7\ m \Rightarrow l = 2{,}7\ m$

b) Cuando suba a velocidad constante, la aceleración será nula y la longitud del muelle será:

$$\Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{3 \cdot 9{,}8}{50} = 0{,}6\ m \Rightarrow l = 2{,}6\ m$$

2.26 Un pintor de fachadas está subido sobre una plataforma que está sujeta por una cuerda que va a una polea, como se muestra en las figuras.



Antes de comenzar a pintar, debe atar el extremo de la cuerda al punto *A* de la plataforma o al punto *B* de la fachada. La cuerda tiene una resistencia de 3500 N y el peso del pintor más la plataforma es de 4000 N. ¿Dónde se ataría la cuerda, al punto *A* o al *B*?

Para resolver este problema, hay que analizar las dos situaciones posibles.

En el caso de la figura *A*, la ecuación que indica la tensión es la siguiente:

$2 \cdot T = m \cdot g$; por tanto, la tensión es: $2 \cdot T = 4000\ N \Rightarrow T = 2000\ N$

En este caso, la resistencia de la cuerda de 3500 N es suficiente para que no se rompa.

En el caso de la figura *B*, tenemos que $T = m \cdot g = 4000$ N, y por tanto se romperá.

MOMENTO LINEAL Y MOMENTO ANGULAR

2.27 El vector posición de una partícula de 4 kg viene dado por $\vec{r}(t) = 3\vec{i} + 2t^2\vec{j}$ (m), donde *t* se expresa en segundos. Calcula en función del tiempo las siguientes magnitudes.

a) La fuerza que actúa sobre ella.

b) El momento lineal de la partícula en el instante t = 3 s.

a) Se calcula la velocidad y la aceleración de la partícula: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4t\vec{j}\ (m\ s^{-1})$; $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{j}\ (m\ s^{-2})$

Por lo tanto, la fuerza que actúa sobre ella es: $\vec{F} = m\,\vec{a} = 16\vec{j}$ (N)

b) En el instante t = 3 s, su velocidad es $\vec{v} = 12\vec{j}\ (m\ s^{-1})$ y su momento lineal es:

$$\vec{p} = m\vec{v} = 4 \cdot 12\ \vec{j} = 48\vec{j}\ (kg\ m\ s^{-1})$$

2.28 Una fuerza variable en el tiempo $\vec{F} = 2 + t^2\vec{i}$ actúa sobre un cuerpo de 3 kg de masa que se mueve por el eje *x* con una velocidad $\vec{v} = -30\vec{i}$ (m s^{-1}).

a) Calcula cuánto vale la variación del momento lineal del cuerpo en el primer segundo de actuación.

b) Cuánto vale la variación del momento angular con respecto al origen.

a) Teniendo en cuenta que en sistemas de masa constante: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}m\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$

Luego $d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt \Rightarrow \int d\vec{p} = \int \vec{F} \cdot dt \Rightarrow \Delta\vec{p} = \int_0^1 \vec{F} \cdot dt = \int_0^1 (2+t^2)\ \vec{i} \cdot dt = \left[\left(2t + \frac{1}{3}t^3\right)\vec{i}\right]_0^1 = \frac{7}{3}\vec{i}\ (\text{kg m s}^{-1})$

b) Como el movimiento es rectilíneo y a lo largo del eje *x*, el momento angular es siempre cero, dado que en todo punto el vector momento lineal es paralelo al vector posición *y*. Por tanto: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = 0 \Rightarrow \Delta L = 0$

2.29 Calcula la velocidad de retroceso de un fusil que tiene 2,2 kg de masa cuando dispara un proyectil de 20 g a una velocidad de 700 m s^{-1}.

Puesto que no hay fuerzas exteriores al sistema fusil-bala, el momento lineal del mismo se conserva. Como inicialmente el sistema está en reposo, el momento total será siempre nulo. Por tanto:

$$m_b\ v_b + m_f\ v_f = 0 \Rightarrow v_f = \frac{-m_b\ v_b}{m_f} = \frac{-0{,}02 \cdot 700}{2{,}2} = -6{,}4 \text{ m s}^{-1}$$

2.30 La posición con respecto al origen de coordenadas de una partícula de 200 g viene dada por el vector $\vec{r} = 2\vec{i} + t^2\vec{j} + \vec{k}$. Calcula:

a) El momento angular de la partícula respecto al punto *P* (1, 0, 1).

b) El momento de la fuerza que actúa respecto al mismo.

a) Se calcula la velocidad derivando el vector de posición:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\ \vec{j}\text{ m s}^{-1} \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v} = 0{,}2 \cdot 2t\ \vec{j} = 0{,}4\ t\ \vec{j}\ (\text{kg m s}^{-1})$$

El momento angular con respecto al punto dado será:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (\vec{i} + t^2\ \vec{j}) \times 0{,}4t\ \vec{j} = 0{,}4t\ \vec{k}\ (\text{kg m}^2\ \text{s}^{-1})$$

b) El momento de la fuerza será:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0{,}4\ \vec{k}\ (\text{N m})$$

2.31 En la proa de una barca inicialmente en reposo y cuyo rozamiento con el agua despreciamos, se encuentra una persona que lanza un fardo de 5 kg con una velocidad horizontal de 6 m s^{-1} hacia la popa, donde la recoge otra persona. La masa total de la barca y las dos personas es de 300 kg. Calcula la velocidad que adquiere la barca mientras que el fardo está en el aire y cuando la otra persona lo recoge.

El momento lineal del sistema se conserva en todo momento, de manera que mientras el fardo está en el aire se tiene:

$$m_b\ v_b = -m_f\ v_f \Rightarrow v_b = \frac{-m_f\ v_f}{m_b} = \frac{-5 \cdot 6}{300} = -0{,}1 \text{ m s}^{-1}$$

La barca avanzará hacia proa y cuando la segunda persona lo recoja el sistema volverá a su estado inicial en reposo.

2.32 Un proyectil de 20 g de masa lleva una velocidad horizontal de 300 m s^{-1} y se empotra en un bloque de 1,5 kg que está inicialmente en reposo. Calcula la velocidad de conjunto inmediatamente después del impacto.

Del principio de conservación del momento lineal en el choque entre la bala y el bloque, se puede extraer la siguiente ecuación:

$$m_p\ v_p + m_b\ v_b = m_{b+p}\ v_{b+p}$$

$$v_{b+p} = \frac{m_p\ v_p + m_b\ v_b}{m_{b+p}} = \frac{0{,}02 \cdot 300}{1{,}52} = 3{,}95 \text{ m s}^{-1}$$

2.33 Una avioneta cuya masa total es de 3200 kg se mueve horizontalmente a una velocidad de 600 km h^{-1} cuando lanza una masa de 40 kg con una velocidad (referida a la avioneta) de 600 km h^{-1} en sentido contrario al de su movimiento. Calcula:

a) La velocidad de la avioneta inmediatamente después de lanzar la masa.

b) La velocidad de la masa a los 5 s de ser lanzada.

a) La masa lanzada se encuentra parada respecto a un punto fijo en tierra, así que, del principio de conservación del momento, se determina que:

$$p_0 = p_f \Rightarrow m_{a+m}\ v_{a+m} = m_m\ v_m + m_a\ v_a$$

$$v_a = \frac{m_{a+m}\ v_{a+m} - m_m\ v_m}{m_a} = \frac{3200 \cdot 600}{3160} = 607{,}6 \text{ km h}^{-1}$$

b) Dado que la masa inicia su movimiento en reposo, solo sufrirá la aceleración de la gravedad, y su velocidad tras 5 s será:

$$v = g\ t = 9{,}8 \cdot 5 = 49 \text{ m s}^{-1}$$

2.34 Sobre un determinado cuerpo actúa una fuerza cuyo momento respecto del eje es: $\vec{M} = 10\ \vec{k}$ (N m)

¿Cuál será la variación del momento angular del cuerpo si la masa de este es de 1 kg y la fuerza se aplica durante 1 s?

Dado que el momento de una fuerza es la derivada del momento angular, se puede indicar que:

$$\Delta\vec{L} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M} dt \Rightarrow \Delta\vec{L} = \int_0^1 10\ \vec{k}\ dt = 10\ \vec{k}\ (1-0) = 10\ \vec{k} \text{ (N m s)}$$

MOMENTO DE INERCIA

2.35 Sobre la llanta de una rueda de bicicleta de 200 g de masa y 350 mm de radio, se colocan diez contrapesos de 3 g cada uno equidistantes entre sí. Calcula el momento de inercia de la rueda lastrada con respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro.

El momento de inercia en la rueda lastrada será igual a la suma del momento de inercia de la rueda más el de los lastres colocados.

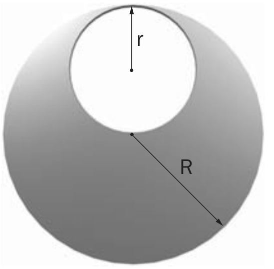
Considerando a la rueda como un anillo, se tiene:

$$I_{sist} = I_{reueda} + I_{lastre}$$

$$I_{sist} = m_{rueda}\ R^2 + n_{lastres}\ m_{lastre}\ r^2 = 0{,}2 \cdot 0{,}35^2 + 10 \cdot 0{,}003 \cdot 0{,}35^2$$

$$I_{sist} = 2{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

2.36 Calcula el momento de inercia de un círculo de chapa homogénea de radio *R* que tiene una perforación de radio *r*, como se muestra en la figura, respecto a un eje perpendicular a él y que pasa por el centro del disco grande.



Se resuelve sumando la contribución de la rueda inicial restándole el momento de inercia de la masa eliminada.

En este caso, sería el momento de inercia de un disco respecto a un eje que pasa por su centro menos el del taladro, que sería el de un disco respecto a un eje que pasa por su extremo.

El momento de inercia de un disco respecto a su centro: $I_{disco} = \frac{1}{2} MR^2$

Momento de inercia del taladro respecto a su centro: $I_{taladro} = \frac{1}{2} mr^2$

Para calcular el momento de inercia respecto a su extremo, se utiliza el teorema de Steiner:

$$I_{taladro} = \frac{1}{2} mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2$$

Finalmente, si se tiene en cuenta que las masas del disco y del taladro son: $M = \sigma\pi R^2$ y $m = \sigma\pi r^2$,

el momento de inercia será: $I_{total} = \frac{1}{2}\sigma\pi R^2\, R^2 - \frac{3}{2}\sigma\pi r^2\, r^2 = \frac{1}{2}\sigma\pi\left(R^4 - 3r^4\right)$

2.37 Las máquinas alternativas, tales como prensas, perforadoras, compresores, motores de explosión, etc., llevan para mantener un movimiento circular uniforme un volante de inercia como el de la figura.

Esta pieza puede considerarse constituida por un disco de radio *R* y masa 0,2 M y un anillo exterior, también de radio *R*, que acumula el 80% de la masa total *M*.

Calcula el momento de inercia de este volante con respecto al eje central.

El momento de inercia será la suma de los dos momentos de inercia:

$$I_{volante} = I_{disco} + I_{anillo} = \frac{1}{2} m_{disco}\, R^2 + m_{anillo}\, R^2 \Rightarrow I_{volante} = \frac{1}{2} 0{,}2\, M\, R^2 + 0{,}8\, M\, R^2 = 0{,}9\, MR^2$$

ECUACIÓN DE LA DINÁMICA DE ROTACIÓN

2.38 La turbina de un ventilador centrífugo tiene un momento de inercia de 250 kg m^2. Calcula qué fuerza se debe realizar sobre la polea de su eje, de 30 cm de radio, para que, partiendo del reposo, esté girando a 1200 *rpm* a los 3 minutos de ponerlo en marcha.

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación se tiene: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = I\vec{\alpha}$

Si la fuerza es perpendicular al radio, se tiene: $r\,F = I\,\alpha \Rightarrow F = \frac{I\alpha}{r}$

El módulo de la aceleración será: $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{1200 \cdot \frac{2\pi}{60}}{3 \cdot 60} = 0{,}7 \text{ rad s}^{-2}$

Sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene: $F = \frac{250 \cdot 0{,}7}{0{,}3} = 580 \text{ N}$

2.39 Para evaluar el momento de inercia del rotor de un motor eléctrico se pone este en funcionamiento y, cuando está girando a la velocidad de régimen, 1500 *rpm*, se desconecta y aplica un freno cuyo momento es conocido con mucha exactitud. Al aplicar un par de frenado de 15,4 N m, el rotor se detiene a los 23,3 s. Calcula su momento de inercia.

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = I\vec{\alpha}$$

Si la fuerza es perpendicular al radio, se tiene:

$$r\,F = I\,\alpha \Rightarrow I = \frac{r\,F}{\alpha}$$

El módulo de la aceleración será:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 1500 \cdot \frac{2\pi}{60}}{23{,}3} = -6{,}74 \text{ rad s}^{-2}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene:

$$I = \frac{-15{,}4}{-6{,}74} = 2{,}28 \text{ kg m}^2$$

2.40 Un cilindro hueco de material pesado tiene la misma masa y dimensiones que otro macizo de un material más ligero. Si ambos cilindros se dejan caer simultáneamente por un plano inclinado, ¿cuál llegará antes a la parte baja del mismo?

El cilindro, en el plano inclinado con un ángulo β, se encuentra sometido a dos fuerzas, la de la gravedad y la fuerza de rozamiento que le hace rodar plano abajo sin deslizar. Si aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica al cilindro, se tiene:

$$m\,g \text{ sen } \beta - F_{roz} = ma \quad \text{donde } F_{roz}\,r = I\alpha = I\frac{a}{r} \Rightarrow F_{roz} = I\frac{a}{r^2}$$

Sustituyendo una ecuación en la otra:

$$m\,g \text{ sen } \beta - I\frac{a}{r^2} = ma \;\Rightarrow\; a = \frac{mg \text{ sen } \beta}{m + \frac{I}{r^2}}$$

El momento de inercia del cilindro hueco ($I = m\,r^2$) es mayor que el del cilindro macizo ($I = 0{,}5\,m\,r^2$) de igual masa, de manera que la aceleración del cilindro hueco será menor.

2.41 Un anillo de 2 cm de diámetro y 3 g de masa se deja caer rodando sin deslizar por un plano inclinado 20º y de 50 cm de longitud. ¿Cuánto tardará en recorrerlo?

Aplicando la ecuación de la aceleración:

$$a = \frac{mg \text{ sen } \beta}{m + \frac{I}{r^2}}$$

Teniendo en cuenta que $I = m\,r^2$; sustituyéndolo, se tiene:

$$a = \frac{mg \text{ sen } \beta}{m + \frac{I}{r^2}} = \frac{mg \text{ sen } \beta}{m + \frac{mr^2}{r^2}} = \frac{1}{2} g \text{ sen } \beta$$

Sustituyendo, se tiene:

$$a = \frac{1}{2} 9{,}8 \text{ sen } 20º = 1{,}68 \text{ m s}^{-2}$$

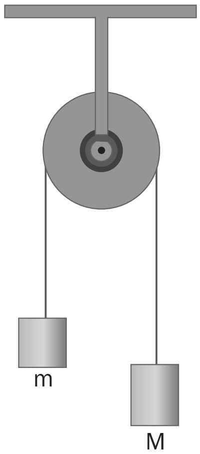
La distancia que recorre un móvil uniformemente acelerado es:

$$d = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}5}{1{,}68}} = 0{,}77 \text{ s}$$

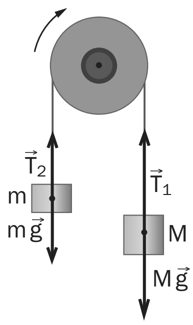
2.42 La figura muestra una polea, que puede ser considerada a efectos del momento de inercia como un disco, de radio 0,1 m y masa 500 g. De cada extremo de una cuerda que pasa por su garganta se cuelgan masas de 3 y 7 kg, y el sistema se deja evolucionar. Calcula:

a) La aceleración de las masas.

b) El momento angular del sistema con respecto al eje de la polea, cuando las masas se muevan con una velocidad de 5 m s^{-1}.



a) El aparejo es una máquina de Atwood en el que el momento de inercia de la polea no es despreciable.



En este caso, la tensión de la cuerda es diferente a cada lado de la polea, lo que causa su giro.

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica a cada lado de la polea, se tiene:

$$M\,g - T_1 = Ma \Rightarrow T_1 = Mg - Ma$$

$$T_2 - m\,g = ma \Rightarrow T_2 = mg + ma$$

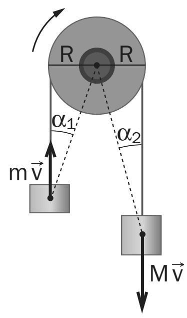
La ecuación fundamental de la rotación aplicada a la polea es:

$$R\,T_1 - R\,T_2 = I\,\alpha = I\frac{a}{R} \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{I\,a}{R^2} = \frac{1}{2}m_pR^2\frac{a}{R^2} = \frac{1}{2}m_pa$$

Sustituyendo:

$$Mg - Ma - mg - ma = \frac{m_p\,a}{2} \Rightarrow a = \frac{g\,(M-m)}{\frac{m_p}{2}+M+m} \Rightarrow a = \frac{9{,}8\,(7-3)}{\frac{0{,}5}{2}+7+3} = 3{,}8\text{ m s}^{-2}$$

b) El momento angular del sistema es igual a la suma del de la polea más los de las masas.



El de la polea es $L_p = I\,\omega$, mientras el de las masas será, como se ve en la figura:

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\times m\vec{v}\right| = rmv\text{ sen }\alpha = mvR$$

Por tanto, el momento total es:

$$L = I\,\omega + mvR + MvR = \frac{1}{2}m_{polea}\,R^2\,\frac{v}{R} + mvR + MvR = \left(\frac{1}{2}m_{polea} + m + M\right)vR$$

Sustituyendo:

$$L = \left(\frac{1}{2}0{,}5 + 3 + 7\right)\cdot 5\cdot 0{,}1 = 5{,}1\text{ kg m}^2\text{ s}^{-1}$$

MOMENTO ANGULAR DE UN SÓLIDO RÍGIDO

2.43 Sobre un disco de 0,12 kg de masa que se encontraba girando a 33 *rpm* en sentido de las agujas del reloj, se deja caer vertical y coaxialmente otro disco de igual radio y masa doble y que gira en sentido contrario a 20 *rpm*. Por rozamiento entre ellos, los discos terminan acoplándose y girando a la misma velocidad.

a) ¿Cuál es la velocidad cuando los discos están acoplados?

b) ¿Cuánto vale su momento angular en este estado?

c) Durante algún momento del acople, uno de los discos ha debido estar en reposo, puesto que ha cambiado su sentido de giro. ¿A qué velocidad se movía entonces el otro?

a) Por la conservación del momento angular, se tiene que: $I_1\ \omega_1 + I_2\ \omega_2 = (I_1 + I_2)\ \omega_F$

$$\omega_F = \frac{\frac{1}{2}m_1R^2\ \omega_1 + \frac{1}{2}m_2R^2\ \omega_2}{\frac{1}{2}m_1R^2 + \frac{1}{2}m_2R^2} = \frac{m_1\ \omega_1 + m_2\ \omega_2}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}12 \cdot 33 - 0{,}24 \cdot 20}{0{,}12 + 0{,}24} = -2{,}33\ rpm = -0{,}24\ \text{rad s}^{-1}$$

b) El momento angular es: $L = (I_1 + I_2)\ \omega_F = \left(\frac{1}{2}m_1R^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\right)\omega_F = -4{,}3 \cdot 10^{-2}\ R^2\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}$

c) Si el de menor momento de inercia está parado, todo el momento angular lo proporciona el otro, de manera que:

$$\frac{1}{2}m_2R^2\ \omega_2 = -9 \cdot 10^{-4}\ R^2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{2 \cdot \left(-4{,}3 \cdot 10^{-2}\right)}{0{,}24} = 0{,}36\ \text{rad s}^{-1}$$

2.44 Una tabla de 2,5 kg de masa y 1,8 m de longitud puede girar libremente alrededor de un eje perpendicular a ella que pasa por su *cdm*. La tabla, inicialmente en reposo, recibe perpendicularmente a 0,5 m del eje de giro el impacto de un proyectil de 25 g de masa y una velocidad de 400 m s^{-1} que se empotra en ella. Calcula la velocidad angular que adquiere el sistema.

En el impacto se conserva el momento angular del sistema. Los momentos de inercia son:

$$I_{tabla} = \frac{1}{12}ML^2 = \frac{1}{12}2{,}5 \cdot 1{,}8^2 = 0{,}675\ \text{kg m}^2$$

$$I_{tabla+proyectil} = \frac{1}{12}ML^2 + mr^2 = 0{,}675 + 0{,}025 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}681\ \text{kg m}^2$$

La conservación del momento de inercia se tiene: $L_0 = L_f$

$$L_0 = I_{tabla}\ \omega_{tabla} + \left|\vec{r} \times m_p\vec{v}_p\right| = 0 + 0{,}5 \cdot 0{,}025 \cdot 400 = 5\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}$$

$$L_f = I_{t+p}\ \omega_{T+p} \Rightarrow \omega_{t+p} = \frac{L_f}{I_{t+p}} = \frac{5}{0{,}681} = 7{,}3\ \text{rad s}^{-1}$$

2.45 Sobre un disco de 200 g de masa y 0,2 m de radio se dejan caer verticalmente bolitas de plastilina que se quedan adheridas al mismo a una distancia de 0,15 m del centro. Cuando han caído 5 bolas, la velocidad del disco se ha reducido en un 90% de la inicial. ¿Cuál es la masa de las bolitas de plastilina?

Se conserva el momento angular del sistema tras la incorporación de las bolitas de plastilina al disco:

$$I_0\omega_0 = I_f\omega_f \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\omega_0 = \left(\frac{1}{2}mR^2 + 5\ m\ r^2\right)\omega_F \Rightarrow \frac{1}{2}0{,}2 \cdot 0{,}2^2\ \omega_0 = \left(\frac{1}{2}0{,}2 \cdot 0{,}2^2 + 5 \cdot m \cdot 0{,}15^2\right)0{,}1\,\omega_0$$

Despejando: $$m = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2^2 - \frac{1}{2}0{,}2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}1}{5 \cdot 0{,}15} = 0{,}32\ \text{kg}$$

PROBLEMAS DE SÍNTESIS

2.46 La plataforma de un tiovivo, que puede considerarse como un disco de 6 m de radio y 500 kg de masa, está girando a razón de 5 vueltas por minuto.

El encargado de recoger los billetes, de 70 kg de masa, que estaba a 1,5 m del centro, se mueve hasta el borde de la plataforma.

a) Calcula la fuerza centrífuga que experimenta el operario cuando está a 3 m del centro.

b) En la plataforma, ¿es más fácil desplazarse radialmente hacia dentro o hacia fuera?

c) Calcula la nueva velocidad de la atracción.

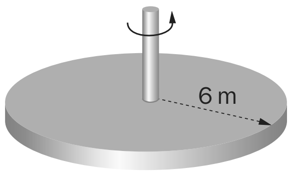
d) Calcula el ángulo con que el operario tiene que inclinarse para permanecer de pie en el borde de la plataforma.

e) El operario se pone a marchar ahora en sentido contrario al de giro, de tal manera que permanece en el mismo punto para los observadores exteriores a la atracción. ¿Cuál es el nuevo momento angular del sistema?

f) ¿Cuál es la velocidad de la atracción?

g) En estas condiciones actúa el freno y detiene a la atracción en 25 segundos. ¿Cuánto vale el momento de frenado?

a) La plataforma es un sistema no inercial, por lo que el operario experimenta una fuerza de inercia igual a la fuerza centrípeta necesaria para mantener el *mcu*. Esta fuerza es:



$$F_c = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = 70\left(\frac{5\cdot 2\pi}{60}\right)^2 \cdot 3 = 57{,}6\text{ N}$$

b) Es más fácil desplazarse hacia fuera "dejándose llevar por la fuerza de inercia". Aunque en este caso no se analiza la energía cinética de rotación, se puede demostrar que, al desplazarse hacia fuera, el momento angular de la plataforma disminuye, dado que aumenta el del operario.

c) En este caso, se conserva el momento angular, de manera que:

$$I_0\omega_0 = I_f\omega_f \Rightarrow \left(\frac{1}{2}mR^2 + mr_1^2\right)\omega_0 = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mr_2^2\right)\omega_F \Rightarrow 9158\ \omega_0 = 11\,520\ \omega_F$$

$$\omega_F = \frac{9158\,\frac{5\cdot 2\pi}{60}}{11520} = 0{,}42\text{ rad s}^{-1}$$

d) Para poder mantenerse en pie, el operador debe inclinarse hacia el eje del tiovivo, de manera que parte del peso actúe como fuerza centrípeta, como se muestra en el dibujo. El ángulo se calcula como:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{F_c}{mg} = \frac{57{,}6}{70\cdot 9{,}8} = 0{,}084 \Rightarrow \alpha = 4{,}8^\circ$$

e) Dado que no existen momentos exteriores, el momento lineal del sistema no puede variar:

$$L = I_0\omega_0 = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mr_1^2\right)\omega_0 = 9158\,\frac{5\cdot 2\pi}{60} = 4795\text{ kg m}^2\text{ s}^{-1}$$

f) Aunque el momento angular se mantenga constante, al estar quieto el operario, todo el momento angular se debe al tiovivo. Por tanto:

$$L = I\omega \Rightarrow \omega = \frac{L}{I} = \frac{L}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{4795}{\frac{1}{2}500\cdot 6^2} = 0{,}53\text{ rad s}^{-1}$$

g) El momento de frenado se calcula, teniendo en cuenta la siguiente relación:

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0 - 4795}{25} = -192\ \text{ N m}$$

2.47 El extremo de una cuerda de 3 m de longitud y masa despreciable se fija y enrolla alrededor de un cilindro macizo de 3 kg de masa y 8 cm de radio. El otro extremo de la cuerda se ata al techo y se suelta el cilindro según muestra la figura.

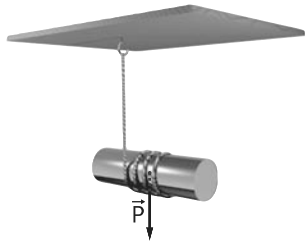
a) Calcula la tensión de la cuerda.

b) Calcula el momento angular del cilindro con respecto a su eje en el punto más bajo de su trayectoria.

c) ¿Por qué no se conserva el momento angular del cilindro?

d) Calcula la variación del momento angular con respecto al tiempo.

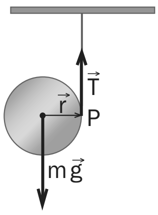
e) Describe el movimiento del cilindro a partir del momento en que toda la cuerda está desenrollada.



a) Sobre el cilindro actúan dos fuerzas, el peso y la tensión de la cuerda. Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}\times\vec{T} = I\vec{\alpha} \Rightarrow rT = I\alpha = I\dfrac{a}{r} \Rightarrow T = I\dfrac{a}{r^2}\\ m\vec{g} - \vec{T} = m\vec{a} \Rightarrow mg - T = ma\end{array}\right\}$$

$$mg - I\frac{a}{r^2} = ma \Rightarrow a = \frac{mg}{m + I\frac{1}{r^2}} = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}mr^2\frac{1}{r^2}} = \frac{2}{3}g$$



Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$T = mg - ma = mg - m\frac{2}{3}g = \frac{1}{3}mg = \frac{1}{3}3 \cdot 9{,}8 = 9{,}8\ \text{N}$$

b) En el punto más bajo de la trayectoria, su velocidad será:

$$v = \sqrt{2\,a\,h} = \sqrt{2\,\frac{2}{3}g\,h} = \sqrt{\frac{4}{3}9{,}8 \cdot 3} = 6{,}26\ \text{m s}^{-1}$$

Por tanto, su velocidad angular será: $\omega = \frac{v}{r} = \frac{6{,}26}{0{,}08} = 78{,}3\ \text{rad s}^{-1}$

Su momento angular será: $L = I\omega = \frac{1}{2}mr^2\omega = \frac{1}{2}3 \cdot 0{,}08^2 \cdot 78{,}3 = 0{,}75\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}$

c) El momento angular del sistema no se conserva, porque sobre él actúan fuerzas exteriores, que son la tensión y la fuerza de la gravedad. Además, el momento que generan éstas fuerzas no es nulo.

d) La variación del momento angular con respecto al tiempo será:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha = I\frac{a}{r}$$

Desarrollando y sustituyendo, se tiene:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}mr^2\frac{2}{3}\frac{g}{r} = \frac{1}{3}mgr \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{1}{3}3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}08 = 0{,}78\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-2}$$

e) Cuando toda la cuerda está desenrollada, se tiene una energía cinética de rotación y un momento angular de rotación que hacen que la cuerda vuelva a enrollarse en sentido contrario, como sucede en un yoyó. Durante la ascensión, el momento de la tensión se opone al movimiento de giro del cuerpo, lo que hace que se frene. Desde una perspectiva energética, la energía cinética se convierte en energía potencial y, en ausencia de rozamiento, el sólido alcanzará la altura desde la que partió.