3 La teoría de la gravitación universal: una revolución científica

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1 Comprueba en la siguiente página web cómo, en una órbita elíptica, en la primera mitad del período, el planeta ha recorrido la mitad de la trayectoria, mientras que esta norma no se repite para cuartos de período.

www.e-sm.net/f2bach22

En la página web se puede comprobar esto, que se debe a la simetría de las elipses.

3.2 Calcula la velocidad de un planeta en el perigeo de su órbita, sabiendo que la relación entre las distancias al foco de ambos puntos es R_A = 0,9 R_P. Expresa el dato en función de la velocidad en el apogeo v_A.

Dado que en todo punto de la trayectoria se conserva el momento angular, se tiene:

$$\vec{r}_A \times m\vec{v}_A = \vec{r}_P \times m\vec{v}_P \Rightarrow r_A v_A = r_P v_P$$

Despejando y sustituyendo, se tiene:

$$v_p = \frac{r_A}{r_p} v_A = 0{,}9\ v_A$$

3.3 Calcula la constante *K* de la tercera ley de Kepler para el movimiento de los planetas alrededor del Sol cuando se ponen las distancias en UA y el tiempo en años terrestres.

La Tierra se encuentra a una distancia del Sol de 1 UA y el período es de 1 año. Por tanto, cuando se emplean distancias en UA y el tiempo en años terrestres la ecuación de Kepler para el Sol se simplifica:

$$T^2 = K\ r^3 \Rightarrow 1^2 = K\ 1^3 \Rightarrow K = 1\ \text{año}^2\ \text{UA}^{-3}$$

3.4 La distancia de Marte al Sol es de 1,523 UA. Calcula el período de Marte en años terrestres.

En aplicación del ejercicio anterior, se tiene que: $T = \sqrt{R^3} = \sqrt{1{,}523^3} = 1{,}88$ años

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

LEYES DE KEPLER

3.5 En el libro *Diálogos sobre el gran sistema del mundo*, Galileo presenta las discusiones entre tres personajes: Salvatius, que es el mismo Galileo; Sagredus, un profano inteligente, y Simplicius, representante del pensamiento aristotélico. Discuten acerca de la rotación de la Tierra según la experiencia de los sentidos al ver caer una piedra desde lo alto de una torre:

SALVATIUS: Aristóteles dice que la mejor prueba de la inmovilidad de la Tierra es ver que los proyectiles que han sido lanzados verticalmente caen en el mismo sitio de lanzamiento, de la misma manera que los cuerpos pesados que se dejan caer desde una torre descienden por una línea recta y perpendicular a la superficie del terreno. Ahora bien, si alguno quisiera negar a Aristóteles y Ptolomeo, ¿qué medios emplearía para hacerlo?

SIMPLICIUS: Por medio de los sentidos, que nos muestran cómo la piedra cae a plomo sin desviarse nada de su trayectoria vertical.

SALVATIUS: Pero si ocurriera que el globo terráqueo también girara y arrastrara a la torre con él, ¿cuál sería entonces el movimiento de la piedra?

SIMPLICIUS: En ese caso tendría dos movimientos: uno de descenso hacia el suelo y otro siguiendo el movimiento de la torre.

SALVATIUS: Así que su movimiento se compondría de dos. De lo que se puede deducir que la trayectoria no sería una línea vertical, sino transversal y acaso no recta.

SIMPLICIUS: Yo no puedo decir nada de su rectitud, pero reconozco que sería transversal.

SALVATIUS: ¿Usted ve? Si meramente observamos que la piedra cae a lo largo de la torre no puede asegurar que su trayectoria sea una recta, a menos que la Tierra esté quieta. Ciertamente, la defensa del método de Aristóteles consiste entonces en que la piedra no pueda tener un movimiento rectilíneo y uno circular […]. Pero el mismo Aristóteles considera que el fuego se mueve en línea recta y hacia arriba sobre la superficie terrestre y se mueve alrededor en todos los movimientos circulares que el cielo imprime al elemento fuego […]. Por lo tanto, si el mismo Aristóteles tiene por posible mezclar los movimientos rectilíneos y circulares desde la concavidad de la esfera de la Luna, no puede considerar imposible la mezcla del movimiento rectilíneo de la piedra con el circular que consideramos natural del globo terráqueo.

SAGREDUS: Quedo satisfactoriamente convencido de la invalidez de todos los experimentos que se han desarrollado hasta ahora para demostrar la quietud de la Tierra […], pero queda la objeción fundada sobre lo que muestra la experiencia, y es que toda rueda que gira tiene la propiedad de expeler y dispersar las materias adheridas a la máquina. En este hecho fundan muchos su opinión, y Ptolomeo entre ellos, que si la Tierra girase con tan gran velocidad, las piedras y las criaturas que sobre ella están serían lanzadas al aire y no habría mortero bastante fuerte para que los edificios no sufrieran semejante expulsión.

a) Busca y reconoce en este texto los principios de los sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

b) Cuando Salvatius habla del giro de la Tierra, ¿a qué movimiento se está refiriendo, al de traslación o al de rotación? Considera que en el sistema geocéntrico no existe ninguno de los dos.

a) Evidentemente, la Tierra en reposo del sistema geocéntrico constituye un sistema inercial, mientras que el sistema heliocéntrico de Copérnico constituye un sistema no inercial, a causa del movimiento curvilíneo que implica. Una persona situada en la Tierra observa un movimiento rectilíneo en la caída de la piedra desde la torre, pero un observador exterior observaría una trayectoria “cuasi parabólica”, como consecuencia del movimiento circular de la Tierra alrededor del Sol y del propio giro terrestre. En realidad, las trayectorias serían planas solo en los polos, pues están afectadas por la “fuerza de Coriolis”, que se debe al giro de la Tierra.

b) El modelo heliocéntrico lleva implícitos dos movimientos. Si la Tierra gira alrededor del Sol, con un período de un año, y no girara sobre su eje, el “día” se correspondería con el año.

Si a lo largo de él, se producen 365 amaneceres es porque la Tierra ha dado, en ese tiempo, 365 vueltas sobre su eje.

3.6 Demuestra que si la única fuerza que actúa sobre un planeta es la atracción gravitatoria su trayectoria ha de ser plana.

La demostración se basa en el principio de conservación del momento angular. La atracción gravitatoria es una fuerza central y, por lo tanto, su momento con respecto al centro de fuerzas es cero. Esto implica que el momento angular del planeta sea constante en módulo, dirección y sentido; como es perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$, será perpendicular al plano de la trayectoria. Por lo tanto, esta ha de estar siempre contenida en el mismo plano.

$$\text{Si } \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \overrightarrow{\text{cte}}$$

3.7 Un planeta está en órbita circular alrededor de una estrella. ¿Es su momento lineal constante? ¿Y su momento angular? Justifica las respuestas.

El momento lineal varía continuamente, dado que el vector velocidad cambia constantemente de dirección. Sin embargo, el momento angular es constante. Esto se puede apreciar en el módulo:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{p}\right| \text{ sen } \alpha$$

Dado que el ángulo entre la velocidad y la posición es siempre 90º, el radio tiene un valor fijo, por ser una órbita circular, y la velocidad también lo será.

Finalmente, el vector será perpendicular al plano de la trayectoria y no variará.

3.8 Calcula el momento angular con respecto al centro de la Tierra de un satélite artificial de 850 kg de masa que se mueve en una órbita circular de 9500 km de radio a una velocidad de 6480 m s^{-1}.

El módulo del momento lineal es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{p}\right| \text{ sen } \alpha = \left|\vec{r}\right| \cdot m \left|\vec{v}\right| \text{ sen } \alpha \Rightarrow \left|\vec{L}\right| = 9{,}5 \cdot 10^6 \cdot 850 \cdot 6480 \cdot \text{sen } 90° = 5{,}23 \cdot 10^{13} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

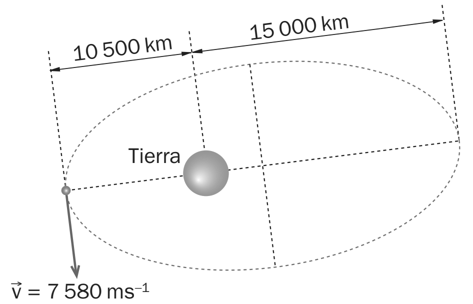
El vector momento lineal estará orientado perpendicularmente a la trayectoria del satélite.

3.9 La Luna describe alrededor de la Tierra una órbita que se puede considerar circular. Calcula la velocidad de la Luna en su movimiento de traslación alrededor de la Tierra considerando que la distancia media es 384 400 km y que su período es de 28 días.

La velocidad puede calcularse dividiendo la longitud de la órbita por su período:

$$v = \frac{l}{T} = \frac{2\pi R_O}{T} = \frac{2\pi \cdot 3{,}844 \cdot 10^8}{28 \cdot 24 \cdot 3600} = 998 \text{ m s}^{-1}$$

3.10 Un satélite artificial tiene una órbita elíptica de manera que cuando está en el perigeo a 10 500 km de distancia del centro de la Tierra su velocidad es de 7580 m s^{-1}. ¿Cuál será la velocidad cuando esté en el apogeo a 15 000 km de la Tierra?



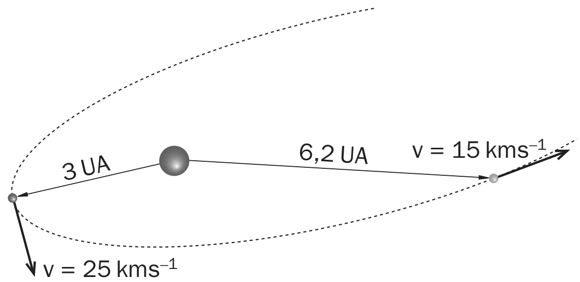
Dado que en todo punto de la trayectoria circular se conserva el momento angular, se tiene:

$$\vec{r}_A \times m\vec{v}_A = \vec{r}_P \times m\vec{v}_P \Rightarrow r_A v_A = r_P v_P$$

Despejando y sustituyendo, se tiene:

$$v_A = \frac{r_P}{r_A} v_P = \frac{1{,}05 \cdot 10^7}{1{,}50 \cdot 10^7} 7580 = 5306 \text{ m s}^{-1}$$

3.11 Un cometa que tiene una órbita muy elíptica alrededor del Sol se mueve a 25 km s^{-1} en el perihelio, a una distancia igual a 3 UA. Cuando se encuentra a 6,2 UA se mueve a 15 km s^{-1}. ¿Qué ángulo forma entonces la tangente a su trayectoria con el radio vector del cometa?



Dado que en todo punto de la trayectoria se conserva el momento angular, se tiene:

$$\vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r}_P \times m\vec{v}_P \Rightarrow r\ v \text{ sen } \alpha = r_P\ v_P \text{ sen } \alpha_p$$

En el perihelio el ángulo formado entre la velocidad y el radio es de 90º; despejando y sustituyendo, se tiene:

$$\text{sen } \alpha = \frac{r_P\ v_P \text{ sen } \alpha_P}{r\ v} = \frac{3 \cdot 25 \cdot \text{sen } 90°}{6{,}2 \cdot 15} = 0{,}806 \Rightarrow \alpha_A = 54°$$

3.12 Neptuno y la Tierra describen órbitas en torno al Sol, siendo el radio medio de la primera órbita treinta veces mayor que el de la segunda. ¿Cuántos años terrestres tarda Neptuno en recorrer su órbita?

Aplicando la tercera ley de Kepler para los dos planetas, haciendo el cociente entre ellas y sustituyendo, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} T_N^{\,2} = K\,R_N^{\,3} \\ T_T^{\,2} = K\,R_T^{\,3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_N^{\,2}}{T_T^{\,2}} = \frac{R_N^{\,3}}{R_T^{\,3}} \Rightarrow T_N = \sqrt{\frac{R_N^{\,3}}{R_T^{\,3}}}\,T_T = \sqrt{\frac{(30\,R_T)^3}{R_T^{\,3}}}\,T_T = 164{,}32\ T_T$$

El periodo de Neptuno será de 164,32 años terrestres.

3.13 Determina la masa del planeta Júpiter sabiendo que el radio de la órbita de su satélite *Io* es de 421 600 km y que su período de revolución es de 1,769 días.

Dato. G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^2

Igualando la fuerza gravitatoria a la fuerza centrípeta, se tiene:

$$G\frac{M_J\,m}{R_O^{\,2}} = m\frac{v^2}{R_O}$$

Por otra parte, se tiene que la velocidad del satélite en su órbita se puede calcular como:

$$v = \frac{2\pi\,R_O}{T}$$

Combinando ambas ecuaciones y despejando, se tiene:

$$G\frac{M_J\,m}{R_O^{\,2}} = \frac{m}{R_O}\,\frac{4\pi^2\,R_O^{\,2}}{T^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_J}\,R_O^{\,3}$$

Despejando la masa de Júpiter y sustituyendo los valores, se tiene:

$$M_J = \frac{4\pi^2}{G}\,\frac{R_O^{\,3}}{T^2} = \frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}}\,\frac{(4{,}216\cdot 10^8)^3}{(1{,}769\cdot 24\cdot 3600)^2} = 1{,}90\cdot 10^{27}\ \text{kg}$$

3.14 Con los datos y la solución del problema anterior, calcula el radio de la órbita del satélite de Júpiter, Callisto, sabiendo que su período de revolución es de 16 689 días terrestres.

Utilizando la tercera ley de Kepler y despejando el radio, se tiene:

$$\frac{T_C^{\,2}}{T_S^{\,2}} = \frac{R_{OC}^{\,3}}{R_{OS}^{\,3}} \Rightarrow R_{OC} = \left(\frac{T_C}{T_S}\right)^{\frac{2}{3}} R_{OS}$$

Despejando y sustituyendo, se tiene:

$$R_{OC} = \left(\frac{16\,689}{1769}\right)^{\frac{2}{3}} 4{,}21\cdot 10^8 = 1{,}88\cdot 10^9\ \text{m}$$

3.15 Júpiter tiene, al menos, 62 satélites girando a su alrededor. El más próximo, Metis, a 128 000 km del centro del planeta. Con los datos de Júpiter dados en la tabla (en unidades del SI), calcula su período de revolución.

Radio	Masa	Distancia media al Sol	Período
6,98 · 10^7	1,90 · 10^{27}	7,78 · 10^{11}	3,74 · 10^8

Aplicando la relación entre aceleración centrípeta y fuerza gravitatoria, se llega a la siguiente igualdad:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_J}\,R_O^{\,3}$$

Sustituyendo los valores de la tabla, se tiene:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G\,M_J}\,R_O^{\,3}} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}90\cdot 10^{27}}\,(1{,}28\cdot 10^8)^3} = 25\,560\ \text{s} = 7\ \text{h}\ 4\ \text{m}$$

3.16 Calcula la constante de la tercera ley de Kepler para Júpiter y para la Tierra, y relaciónalas con sus masas respectivas.

Datos. $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $M_J = 1,9 \cdot 10^{27}$ kg

La constante de la tercera ley de Kepler es:

$$K = \frac{4\pi^2}{G\,M}$$

Sustituyendo los valores para Júpiter y para la Tierra, se tiene:

$$K_J = \frac{4\pi^2}{G\,M_J} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,9 \cdot 10^{27}} = 3,12 \cdot 10^{-16}\ s^2\ m^{-3}$$

$$K_T = \frac{4\pi^2}{G\,M_T} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}} = 9,90 \cdot 10^{-14}\ s^2\ m^{-3}$$

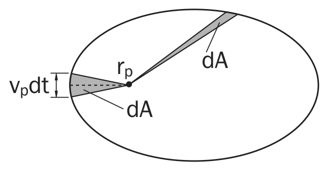
El cociente entre ambas magnitudes es la inversa del cociente entre las masas de los planetas:

$$\frac{K_J}{K_T} = \frac{M_T}{M_J}$$

3.17 Se llama velocidad areolar al cociente entre la superficie comprendida por la trayectoria y dos radios vectores de un planeta y el tiempo transcurrido:

$$\mathbf{v_A = \frac{dA}{dt}}$$

Esta velocidad es, según la segunda ley de Kepler, constante. Calcula la velocidad areolar de la Tierra en cualquier momento sabiendo que en el perihelio está a $1,475 \cdot 10^{11}$ m y que su velocidad es entonces de 30 244 m s^{-1}.



En el perihelio, $\vec{v}$ y $\vec{r}$ son perpendiculares. En el instante de máximo acercamiento, el arco recorrido es igual a v_p dt, que podemos asimilar a un segmento de recta. El área del triángulo isósceles formado es:

$$dA = \frac{1}{2} v_P \cdot dt \cdot r_p$$

La velocidad areolar será: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2} v_p\ r_p = \dfrac{1}{2}\, 30\,244 \cdot 1,475 \cdot 10^{11} = 2,230 \cdot 10^{15}\ m^2\ s^{-1}$

3.18 Con los datos del problema anterior, calcula la velocidad del movimiento de traslación de la Tierra en el afelio cuando está a $1,526 \cdot 10^{11}$ m y compárala con la velocidad correspondiente a una órbita circular.

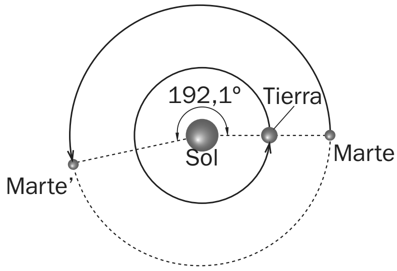
Como en todos los puntos de la trayectoria la velocidad areolar es constante, y además en el afelio la velocidad y el vector de posición son perpendiculares, se tiene:

$$v_{Areolar} = \frac{1}{2} v_a\ r_a \Rightarrow v_a = \frac{2\ v_{Areolar}}{r_a} = \frac{2 \cdot 2,230 \cdot 10^{15}}{1,526 \cdot 10^{11}} = 29\,230\ m\ s^{-1}$$

Si se considera que el radio de una órbita circular es el valor medio entre el del afelio y el del perihelio:

$$v_{circular} = \frac{2\ v_{areolar}}{r_m} = \frac{2\ v_{areolar}}{\frac{r_p + r_a}{2}} = \frac{4\ v_{areolar}}{r_p + r_a} = \frac{4 \cdot 2,20 \cdot 10^{15}}{1,526 \cdot 10^{11} + 1,475 \cdot 10^{11}} = 29\,720\ m\ s^{-1}$$

3.19 Considera la Tierra y Marte en oposición, es decir, alineados con el Sol y situados de forma que la Tierra esté entre el Sol y Marte. Calcula el ángulo que formarán los radios vectores de la Tierra y Marte al cabo de un año terrestre.

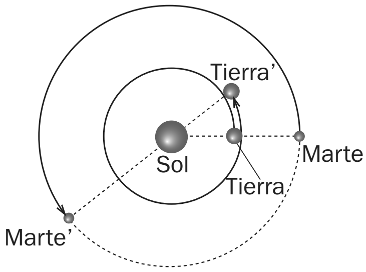


Considerando el período de rotación de la Tierra como un año, y su radio como 1 UA, y dado que el radio de la órbita de Marte es 1,523 UA, se tiene que el período de Marte será:

$$T_{Marte} = \sqrt{{R_{Marte}}^3} = \sqrt{1{,}523^3} = 1{,}88 \text{ años}$$

En un año Marte habrá recorrido un ángulo de: $\alpha = \dfrac{360^\circ}{1{,}88 \text{ años}} \cdot 1 \text{ año} = 191{,}5^\circ$

3.20 Partiendo de la posición inicial del problema anterior, calcula el tiempo que transcurrirá hasta que los planetas estén en conjunción, alineados y con el Sol entre ambos planetas.



Para que se cumpla la situación del enunciado, es necesario que se cumpla el criterio de la figura:

$$\alpha_T + 180^\circ = \alpha_M$$

Sustituyendo el tiempo desde el la situación de oposición, se tiene:

$$\frac{360^\circ}{1 \text{ año}} t - 360^\circ + 180^\circ = \frac{360^\circ}{1{,}88} t \Rightarrow 360^\circ \left(1 - \frac{1}{1{,}88}\right) t = 180^\circ \Rightarrow t = \frac{1}{2\left(1 - \dfrac{1}{1{,}88}\right)} = 1{,}068 \text{ años}$$

Por tanto, desde la situación del ejercicio anterior tendrán que pasar 0,068 años, es decir, 24,8 días.

3.21 En un periódico de información general dan los datos de la órbita de un satélite artificial que está girando alrededor de la Tierra. En él se dice que cuando está en el perigeo a "7000 km de la Tierra" su velocidad es de 8500 m s^{-1} y cuando está en el apogeo a "17 000 km de distancia" su velocidad es de 4860 m s^{-1}.

a) Cuando hablan de distancia a la Tierra, ¿a qué distancia se refieren? ¿A la superficie terrestre o al centro de la Tierra?

b) ¿Son correctos los datos dados? ¿Por qué?

a) Si se analizan los datos como radios orbitales, se puede observar que no se cumple el principio de conservación del momento lineal, pero sí se cumple si se considera la altura sobre la superficie terrestre:

$$7000 \cdot 8500 \neq 17\,000 \cdot 4860; \qquad (7000 + 6370) \cdot 8500 = (17\,000 + 6370) \cdot 4860$$

b) Los datos considerados como altura desde la superficie terrestre podrían ser válidos.

3.22 Con los datos del ejercicio anterior, indica cuál debería ser la velocidad en el perigeo si se estuvieran refiriendo a distancias al centro de la Tierra.

Si se considera que se mantiene constante el momento angular del satélite, se tendría:

$$\vec{r}_A \times m\vec{v}_A = \vec{r}_P \times m\vec{v}_P \Rightarrow r_A v_A = r_P v_P$$

Despejando y sustituyendo, se tendría:

$$v_P = \frac{r_A}{r_P} v_A = \frac{17 \cdot 10^6}{7 \cdot 10^6} 4\,860 = 11\,803 \text{ m s}^{-1}$$

3.23 Con los únicos datos astronómicos de la Tierra y la Luna (dados por la tabla en unidades del SI) calcula la distancia a la que orbitan los satélites artificiales que tienen un período igual a un día terrestre, denominados satélites geoestacionarios.

	Radio	Masa	Radio de su órbita	Período
Tierra	$6,37 \cdot 10^6$	$5,98 \cdot 10^{24}$	$1,5 \cdot 10^{11}$	$3,16 \cdot 10^7$
Luna	$1,74 \cdot 10^6$	$7,35 \cdot 10^{22}$	$3,84 \cdot 10^8$	$2,36 \cdot 10^6$

La tercera ley de Kepler aplicada a la Luna o a otros cuerpos que orbiten a la Tierra es:

$$T^2 = K\, R_O{}^3$$

Si se realiza el cociente entre las características orbitales de la Luna y de un satélite artificial, se tiene:

$$\frac{T_S{}^2}{T_L{}^2} = \frac{R_S{}^3}{R_L{}^3} \Rightarrow R_S = \left(\frac{T_S}{T_L}\right)^{\frac{2}{3}} R_L$$

Sustituyendo los valores de la tabla y del enunciado, se tiene:

$$R_S = \left(\frac{24 \cdot 3600}{2,36 \cdot 10^6}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 3,84 \cdot 10^8 = 4,23 \cdot 10^7 \text{ m}$$

3.24 Como consecuencia de las reacciones nucleares que ocurren en el interior del Sol se produce una pérdida de masa. Cada segundo, $7 \cdot 10^{11}$ kg de hidrógeno se transforman en $6,5 \cdot 10^{11}$ kg de helio, y el resto, $5 \cdot 10^{10}$ kg, se transforman en energía. ¿Cómo evolucionarán el radio de la órbita terrestre y el período de su movimiento?

Si se mantiene el ritmo de pérdida de masa y el radio de la órbita terrestre, calcula cuál será la duración del año terrestre dentro de un millón de años.

La disminución de masa del Sol hará que el período de revolución de la Tierra vaya aumentado, aunque muy lentamente, tal como se deduce de la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_S} R_O{}^3$$

La pérdida de masa del Sol tras 1 millón de años será: $5 \cdot 10^{10} \text{ kg s}^{-1} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365,25 \cdot 10^6 \text{ s} = 1,58 \cdot 10^{24}$ kg

Dado que la masa del Sol es $1,98 \cdot 10^{30}$ kg, la masa final en función de la masa actual será:

$$M_S' = 0,9999992\, M_S$$

Aplicando la tercera ley de Kepler, se tiene:

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{\frac{4\pi^2}{G\,M_S'} R_O{}^3}{\frac{4\pi^2}{G\,M_S} R_O{}^3} \Rightarrow T' = \sqrt{\frac{M_S}{M_S'}}\, T = \sqrt{0,9999992^{-1}} \cdot 1 \text{ año} = 1,0000004 \text{ años}$$

3.25 Si se extraen logaritmos de la tercera ley de Kepler resulta que:

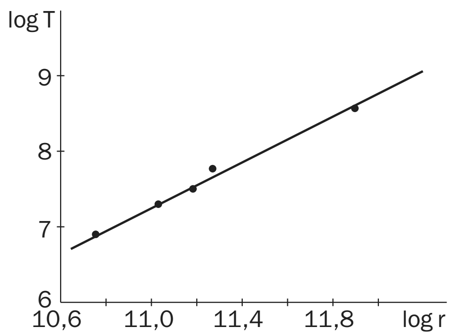
$$\mathbf{2 \log T = \log K + 3 \log r}$$

Realiza una tabla con los valores de los logaritmos de los períodos y distancias al Sol de los planetas y después representa los valores en una gráfica log T – log r.

Comprueba que se trata de una recta de pendiente $\frac{3}{2}$ y ordenada en el origen $-9{,}26 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)$.

Cuerpo	T(s)	log T	r (m)	log r
Mercurio	**$7{,}6 \cdot 10^{6}$**	**6,88**	**$5{,}79 \cdot 10^{10}$**	**10,76**
Venus	**$1{,}9 \cdot 10^{7}$**	7,28	**$1{,}08 \cdot 10^{11}$**	11,03
Tierra	**$3{,}2 \cdot 10^{7}$**	7,51	**$1{,}50 \cdot 10^{11}$**	11,18
Marte	**$5{,}9 \cdot 10^{7}$**	7,77	**$2{,}28 \cdot 10^{11}$**	11,36
Júpiter	**$3{,}7 \cdot 10^{8}$**	8,57	**$7{,}78 \cdot 10^{11}$**	11,89

Si se representa la gráfica y se realiza un ajuste, se comprueba que el valor de la pendiente de la gráfica vale $\frac{3}{2}$ y la ordenada en el origen vale –9,26.



LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

3.26 Calcula la fuerza con que se atraen la Tierra y la Luna y comprueba que esta fuerza, actuando como centrípeta, hace que la Luna gire alrededor de la Tierra en un movimiento circular uniforme cuyo período es aproximadamente 28 días.

La fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y la Luna es:

$$F = G\frac{M_T\, M_L}{{R_O}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}}{(3{,}84 \cdot 10^{8})^2} = 1{,}99 \cdot 10^{20}\ \text{N}$$

Para que la Luna tenga el movimiento circular uniforme característico, es necesaria una fuerza centrípeta de:

$$F = M_L\ {\omega_L}^2\ R_O = 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \frac{4\pi^2}{(28 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \cdot 3{,}84 \cdot 10^{8} = 1{,}91 \cdot 10^{20}\ \text{N}$$

La diferencia entre ambas fuerzas se debe a que el período de la Luna no es de 28 días exactos.

3.27 Calcula el valor con que la Tierra atrae a una masa de 1 kg colocada sobre su superficie. Interpreta el resultado obtenido.

La fuerza de atracción gravitatoria será:

$$F = G\frac{M_T\, m}{R_O{}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1}{(3{,}84 \cdot 10^8)^2} = 9{,}8\ \text{N}$$

La fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos próximos a su superficie es igual a 9,8 N por cada kilogramo de masa. De ahí surge el concepto de aceleración de la gravedad, que es de 9,8 m s^{-2}, y el concepto de peso:

$$P = 9{,}8 \cdot m$$

3.28 Antes de que Cavendish determinara el valor de la constante de gravitación universal, se pudo calcular la masa relativa (con respecto a la Tierra) del Sol, Marte, Júpiter y Saturno, planetas conocidos que disponían de satélites naturales observables desde la Tierra con los telescopios de la época. Atendiendo a esas consideraciones, calcula la masa relativa de Marte con respecto a la Tierra, sabiendo que la distancia Tierra-Luna es $d_{TL} = 3{,}84 \cdot 10^8$ m y el período lunar es $T_L = 2{,}36 \cdot 10^6$ s, y que Phobos, uno de los satélites marcianos, tiene un período de 7 horas, 39 minutos y 30 segundos, y una órbita de 9380 km de radio.

Aplicando la tercera ley de Kepler a los movimientos de la Luna y de Phobos, se tiene:

$$T_L{}^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}\,R_{OL}{}^3 \quad y \quad T_P{}^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_M}\,R_{OP}{}^3$$

Dividiendo los periodos entre sí, se tiene:

$$\frac{T_L{}^2}{T_P{}^2} = \frac{\dfrac{4\pi^2}{G\,M_T}}{\dfrac{4\pi^2}{G\,M_M}}\,\frac{R_{OL}{}^3}{R_{Op}{}^3} = \frac{M_M}{M_T}\,\frac{R_{OL}{}^3}{R_{Op}{}^3} \Rightarrow M_M = M_T \cdot \left(\frac{T_L}{T_P}\right)^2 \cdot \left(\frac{R_{OP}}{R_{OL}}\right)^3$$

Sustituyendo, se tiene:

$$M_M = M_T \cdot \left(\frac{2{,}36 \cdot 10^6}{7 \cdot 3600 + 39 \cdot 60 + 30}\right)^2 \cdot \left(\frac{9{,}38 \cdot 10^6}{3{,}84 \cdot 10^8}\right)^3 = 0{,}107\ M_T$$

3.29 La masa de la Luna es de $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg y la de la Tierra de $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. La distancia media de la Tierra a la Luna es de $3{,}84 \cdot 10^8$ m. Calcula:

a) El período de giro de la Luna alrededor de la Tierra.

b) La energía cinética de la Luna.

c) A qué distancia de la Tierra se cancela la fuerza neta ejercida por la Luna y la Tierra sobre un cuerpo allí situado.

Dato. $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

a) El período del movimiento circular uniforme se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}\,R_{OL}{}^3 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R_{OL}{}^3}{G\,M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(3{,}84 \cdot 10^8)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}} = 2{,}367 \cdot 10^6\ \text{s} = 27{,}4\ \text{días}$$

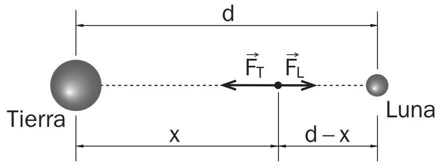
b) La energía cinética de un cuerpo en órbita es igual a la mitad del módulo de su energía potencial, como se puede observar en la siguiente deducción:

$$G\frac{M_T\,M_L}{R_O{}^2} = M_L\,\frac{v_O{}^2}{R_O} \Rightarrow v_O{}^2 = G\frac{M_T}{R_O} \Rightarrow E_C = \frac{1}{2}M_L\,v_O{}^2 = \frac{1}{2}G\frac{M_T\,M_L}{R_O}$$

Sustituyendo, se tiene:

$$E_C = \frac{1}{2}G\frac{M_T\,M_L}{R_O} = \frac{1}{2}6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{3{,}84 \cdot 10^8} = 3{,}82 \cdot 10^{28}\ \text{J}$$

c) La fuerza neta sobre el cuerpo situado entre la Tierra y la Luna se hará cero cuando las atracciones gravitatorias de ambos astros sean iguales y de sentido contrario, lo que sucederá en un punto a una distancia *x* de la Tierra, como se muestra en la figura.



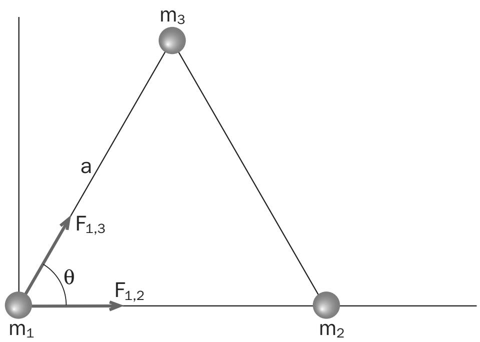
En el punto indicado se cumple la siguiente igualdad:

$$G\frac{M_T}{x^2} = G\frac{M_L}{(d-x)^2} \Rightarrow (d-x)^2\, M_T = M_L\, x^2$$

Despejando y sustituyendo los valores, se tiene que la distancia x = 3,46 · 10^8 m

3.30 Tres masas puntuales, m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg y m_3 = 3 kg, están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado $a = \sqrt{3}$ m, en una región del espacio en la que no hay ninguna otra masa. Considerando el carácter vectorial de la fuerza de atracción entre las masas, calcula el módulo de la fuerza de atracción gravitatoria que experimente la masa m_1.

Dato. G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}



La fuerza neta será la suma de las dos fuerzas cuyos valores son:

$$F_{1,2} = G\frac{m_1\, m_2}{a^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{1 \cdot 2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = 4{,}45 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\ ; \quad F_{1,3} = G\frac{m_1\, m_3}{a^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{1 \cdot 3}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}$$

El módulo resultante de la combinación de dos fuerzas que forman un ángulo de 60º es:

$$F = \sqrt{F_{1,2}{}^2 + F_{1,3}{}^2 + 2\, F_{1,2}\, F_{1,3}\cos\alpha}$$

$$F = \sqrt{(4{,}45 \cdot 10^{-11})^2 + (6{,}67 \cdot 10^{-11})^2 + 2\,(4{,}45 \cdot 10^{-11}) \cdot (6{,}67 \cdot 10^{-11}) \cdot \cos 60º} = 9{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{N}$$

3.31 Calcula la fuerza con que se atraen dos esferas de plomo de 1 m de diámetro si están en contacto.

Dato. Densidad del plomo = 11 400 kg m^{-3}

La distancia entre los centros de las dos esferas es de 1 m, y la masa de cada esfera es:

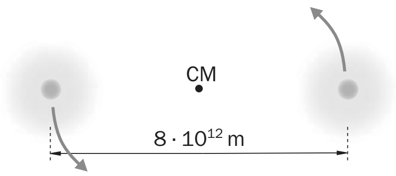
$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}5^3 \cdot 11\,400 = 5969\ \text{kg}$$

Luego la fuerza de atracción será:

$$F = G\frac{m\, m}{d^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{5969^2}{1^2} = 2{,}38 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

3.32 Dos estrellas gemelas de masa igual a 10 veces la masa de nuestro Sol y distantes una de otra $8 \cdot 10^{12}$ m se encuentran girando alrededor del centro de masas del sistema formado por ambas. Calcula el período de su movimiento de giro.

Dato: masa del Sol = $1,98 \cdot 10^{30}$ kg



Visto desde cada estrella se vería a la otra girar a su alrededor en una órbita circular, pero un observador inercial exterior al sistema verá a ambas estrellas girar alrededor del centro de masas del sistema que está en el centro del segmento que une a ambas estrellas.

De esta manera, se puede plantear la siguiente igualdad:

$$G\frac{M\,M}{(2\,R)^2} = M\omega^2 R \;\Rightarrow\; \frac{G\,M}{4\,R^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

Despejando el valor del período, se tiene:

$$T = \sqrt{\frac{16\,\pi^2}{G\,M}R^3}$$

Sustituyendo, se tiene:

$$T = \sqrt{\frac{16\,\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,98 \cdot 10^{30}}(4 \cdot 10^{12})^3} = 8,75 \cdot 10^9\ \text{s}$$

3.33 Calcula la fuerza con que una persona de 70 kg de masa colocada sobre la superficie terrestre atrae a la Tierra.

La fuerza está dada por la ecuación de fuerza gravitatoria, que es:

$$F = G\frac{m\,M_T}{R_T{}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{70 \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6,36 \cdot 10^6)^2} = 686\ \text{N}$$

Esta fuerza es igual a la que ejerce la Tierra sobre la persona.

3.34 Dos esferas de una tonelada de masa están en contacto. Si la atracción gravitatoria entre ellas es 0,0001 N, ¿cuál es su densidad, considerada uniforme?

La distancia entre los centros de las dos masas es 2R, por tanto:

$$F = G\frac{m\,m}{(2R)^2} \Rightarrow R = \sqrt{G\frac{m^2}{4F}} = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{(10^3)^2}{4 \cdot 0,0001}} = 0,408\ \text{m}$$

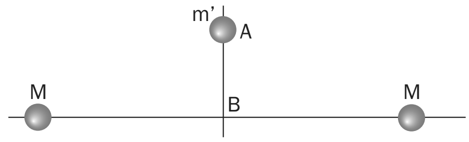
La densidad de las esferas será:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1000}{\frac{4}{3}\pi \cdot (0,408)^3} = 3515\ \text{kg m}^{-3}$$

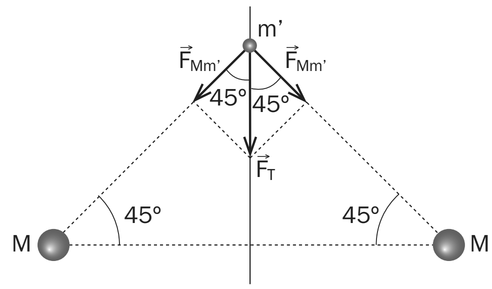
3.35 Dos masas iguales, M = 20 kg, ocupan posiciones fijas separadas una distancia de 2 m, según indica la figura. Una tercera masa, m' = 0,2 kg, se suelta desde el reposo en un punto *A* equidistante de las dos masas anteriores y a una distancia de 1 m de la línea que las une (AB = 1 m). Si no actúan más que la acciones gravitatorias entre estas masas, determina:

a) La fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la masa *m'* en la posición *A*.

b) Las aceleraciones de la masa *m'* en las posiciones *A* y *B*.



a) La fuerza ejercida en el punto *A* es igual a la suma de las dos fuerzas. Dada la simetría que hay en el problema, como se puede ver en la siguiente figura, se anulan las componentes horizontales de la fuerza y solo la componente vertical se mantendrá.



De esta manera, la fuerza que sufra será:

$$F = 2\,F_{vertical} = 2\,G\frac{M\,m'}{d^2}F\cos\alpha$$

$$F = 2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{20\cdot 0{,}2}{(\sqrt{2})^2}\cos 45° = 1{,}89\cdot 10^{-10}\text{ N}$$

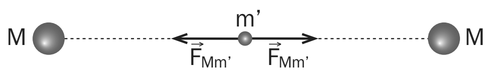
$$\overrightarrow{F_T} = -1{,}89\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\,(\text{N})$$

b) La aceleración en *A* será:

$$a_A = \frac{F_A}{m'} = \frac{1{,}89\cdot 10^{-10}}{0{,}2} = 9{,}45\cdot 10^{-10}\text{ m s}^{-2}$$

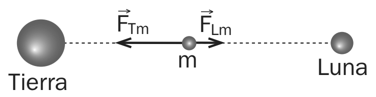
$$\overrightarrow{a_A} = -9{,}45\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\,\left(\text{m s}^{-2}\right)$$

La aceleración en *B* será 0 porque, como se observa en la figura, la fuerza en este punto es nula.



3.36 Dibuja en un esquema las fuerzas que actúan sobre un cuerpo de 1000 kg, situado en el punto medio entre la Tierra y la Luna y calcula el valor de la fuerza resultante sabiendo que la distancia desde el centro de la Tierra hasta el de la Luna es $3{,}84 \cdot 10^8$ m.

Datos. $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg



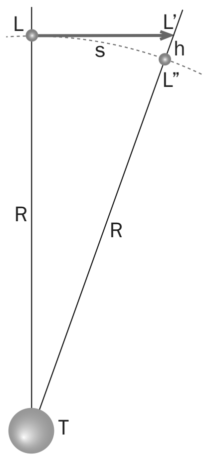
En el punto medio entre la Tierra y la Luna, las fuerzas gravitatorias de los dos astros se oponen. La fuerza resultante será: $F = G\dfrac{M_T\, m}{\left(\dfrac{d_{T-L}}{2}\right)^2} - G\dfrac{M_L\, m}{\left(\dfrac{d_{T-L}}{2}\right)^2} = \dfrac{Gm}{\left(\dfrac{d_{T-L}}{2}\right)^2}(M_T - M_L)$

Sustituyendo, se tiene:

$$F = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000}{\left(\dfrac{3{,}84 \cdot 10^8}{2}\right)^2}(5{,}98 \cdot 10^{24} - 7{,}35 \cdot 10^{22}) = 10{,}69 \text{ N}$$

PROBLEMA DE SÍNTESIS

3.37 Newton calculó la aceleración que causa la atracción gravitatoria en la órbita de la Luna mediante un método gráfico similar al siguiente:



La Luna sigue una trayectoria circular porque la Tierra la atrae. Si no fuera así, y en virtud del principio de inercia, escaparía según un movimiento rectilíneo por la trayectoria L – L' de longitud *l*. Debido a la atracción gravitatoria, la Luna sigue la trayectoria curvilínea *s* de manera que pasa de la posición *L* a *L''* por la trayectoria de longitud s = l. Para un intervalo de tiempo muy pequeño, tal como un segundo, se puede considerar que la Luna ha caído la distancia h = L' – L''. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{R^2 + l^2} - R$$

Como *h* es mucho menor que *R*, se puede demostrar que:

$$h = \frac{l^2}{2R} = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{R}\right)^2 R = \frac{1}{2}\frac{4\pi^2}{T^2}R$$

Donde $\frac{l}{R}=\frac{s}{R}$ es el ángulo, en radianes, barrido por el radio-vector de la Luna en un segundo, igual a la longitud de la órbita dividida por el período:

$$\frac{l}{R}=\frac{2\pi}{T}$$

Pero el movimiento de "caída" de la Luna en ese intervalo tan corto de tiempo se puede considerar como rectilíneo y uniformemente acelerado, de manera que:

$$h=\frac{1}{2}at^2$$

y para t = 1 s la aceleración de la gravedad a esa altura es, en valor numérico, igual al doble de la distancia descendida.

Comprueba, siguiendo a Newton, que el cociente entre las aceleraciones sobre la superficie terrestre y en la órbita lunar es igual al cuadrado del cociente entre las distancias al centro de la Tierra de la órbita lunar y de la superficie terrestre. De ahí se deduce que las aceleraciones, y por tanto las fuerzas aplicadas, son inversamente proporcionales al cuadrado de las distancias que las separan. Datos que conocía Newton:

Radio de la Tierra = 6370 km

Radio de la órbita de la Luna = $3{,}84 \cdot 10^8$ m

Período lunar = 27,322 días

Según el texto, el valor de *h* para t = 1 s es:

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}\frac{4\pi^2}{T^2}R \\ h &= \frac{1}{2}a_{OL}\cdot 1^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=\frac{4\pi^2}{T^2}R$$

Sustituyendo los valores, se obtiene la aceleración en la órbita lunar:

$$a_{OL}=\frac{4\pi^2}{(27{,}322\cdot 24\cdot 3600)^2}\cdot 3{,}84\cdot 10^8=2{,}72\cdot 10^{-3}\text{ m s}^{-2}$$

El cociente entre la aceleración en la superficie de la Tierra frente a la de la luna es:

$$\frac{a_0}{a_{OL}}=\frac{9{,}8}{2{,}72\cdot 10^{-3}}=3603$$

Por otra parte, se tiene que el cociente entre el radio de la órbita lunar y el de la Tierra al cuadrado es:

$$\left(\frac{R_{OL}}{R_T}\right)^2=\left(\frac{3{,}84\cdot 10^8}{6{,}37\cdot 10^6}\right)^2=3634$$

Por tanto, se cumple aproximadamente que:

$$\frac{a_0}{a_{OL}}=\left(\frac{R_{OL}}{R_T}\right)^2$$