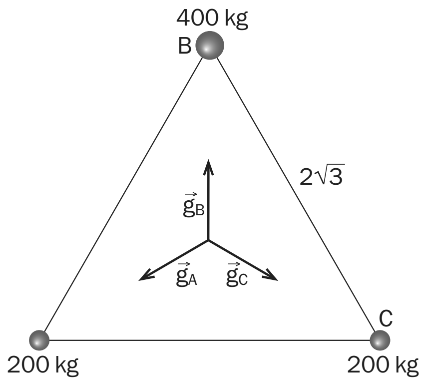
4 El campo gravitatorio

EJERCICIOS PROPUESTOS

4.1 En los vértices de un triángulo equilátero de 3 m de altura, se encuentran tres masas puntuales de 200, 400 y 200 kg, respectivamente. Calcula la intensidad del campo gravitatorio en el baricentro del triángulo.

Teniendo en cuenta en la figura la simetría de la distribución de las masas, lo más adecuado en este caso es poner el centro del sistema de coordenadas en el baricentro *G* del triángulo. Este se encuentra a 1/3 de la altura, de manera que, teniendo en cuenta que el lado del triangulo equilátero es:



$$l^2 = 3^2 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow l = 2\sqrt{3}\ \text{m},$$

las coordenadas de los vértices del triangulo con respecto al baricentro serán:

$$A = (-\sqrt{3}, -1);\ B = (0,2);\ C = (\sqrt{3}, -1)$$

Los vectores de posición de *G* con respecto a las masas serán:

$$\vec{r}_{GA} = \sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\ ;\ \vec{r}_{GB} = -2\vec{j}\ ;\ \vec{r}_{GC} = -\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}$$

Todos ellos tienen de módulo 2.

El campo gravitatorio en *G* es la suma de los campos gravitatorios creados por cada una de las masas:

$$\vec{g}_G = \vec{g}_{GA} + \vec{g}_{GB} + \vec{g}_{GC}\ ;\ \vec{g}_{GA} = -G\frac{200}{2^2}\cdot\frac{\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}}{2}\ ;\ \vec{g}_{GB} = -G\frac{400}{2^2}\cdot\frac{-2\vec{j}}{2}\ ;\ \vec{g}_{GC} = -G\frac{200}{2^2}\cdot\frac{-\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}}{2}$$

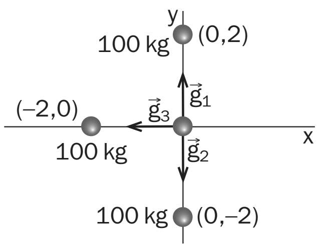
Teniendo en cuenta las condiciones de simetría de la posición y la masa de los vértices *A* y *C*, se ve enseguida que las componentes en *x* de g_{GA} y g_{GC} se anulan.

En cuanto a la componente en el eje *y*, se tiene:

$$\vec{g}_G = -G\frac{200 - 800 - 200}{8}\vec{j} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{-400}{8} = 3{,}34\cdot 10^{-9}\,\vec{j}\ \left(\text{N kg}^{-1}\right)$$

4.2 En los puntos (0, 2), (0, –2) y (–2, 0) existen tres masas iguales de 100 kg cada una. Calcula la intensidad del campo gravitatorio en el origen de coordenadas.

De la observación del dibujo, teniendo en cuenta que las masas son iguales, se deduce inmediatamente que los campos gravitatorios de las masas situadas en el eje de ordenadas, $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$, se anulan. Por lo tanto, es suficiente con calcular el campo $\vec{g}_3$ creado por la masa situada en el punto (–2, 0):



$$\vec{g}_3 = -6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{100}{4}\vec{i} = -1{,}67\cdot 10^{-9}\,\vec{i}\ \left(\text{N kg}^{-1}\right)$$

4.3 Teniendo en cuenta los radios polar y ecuatorial de la esfera terrestre, calcula los valores de g_0 en esos puntos.

Los radios ecuatorial y polar terrestres se pueden encontrar en el díptico que acompaña al libro; sus valores son: radio ecuatorial: 6378 km; radio polar: 6357 km.

Sustituyendo estos valores en la expresión del campo gravitatorio terrestre, se tiene:

$$g_{0e} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{(6{,}378\cdot 10^6)^2} = 9{,}81\ \text{N kg}^{-1};\ g_{0p} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{(6{,}357\cdot 10^6)^2} = 9{,}87\ \text{N kg}^{-1}$$

4.4 Si se pudiera perforar un pozo de 100 km de profundidad, ¿cuánto valdría la intensidad del campo gravitatorio terrestre en su interior?

Dentro de una esfera de densidad de masa constante, el campo gravitatorio solo depende de la masa que se encuentra con un radio inferior al radio en que nos encontramos. Por tanto:

$$\vec{g}_I = -G\frac{M_T r}{{R_T}^3}\vec{u}_r = \frac{r}{R_T}\vec{g}_0 ; g_I = \frac{6266}{6366} \cdot 9{,}81 = 9{,}66 \text{ N kg}^{-1}$$

4.5 En una zona del espacio donde está establecido el campo de fuerzas uniforme con $\vec{F} = 3\vec{i} + 9\vec{j}$, se mueve una partícula desde el punto *A*(2, 3) al punto *B*(6, 2). Calcula la diferencia de energía potencial que experimenta en el traslado.

Como los campos de fuerzas uniformes son campos conservativos, se puede establecer el concepto de diferencia de energía potencial como el trabajo que hace el campo para llevar la partícula desde *A* hasta *B* por cualquier camino. Si se lleva en línea recta siguiendo el vector *AB*, este trabajo sería:

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = W_{B\to A} = \int_B^A \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

En este caso, $\vec{F}$ es constante y se puede realizar el cálculo de la siguiente manera:

$$\Delta E_p = \vec{F}\int_B^A d\vec{r} = \vec{F}\cdot(\vec{r}_A - \vec{r}_B) = (3\vec{i} + 9\vec{j})\cdot(-4\vec{i} + \vec{j}) = -12 + 9 = -3 \text{ J}$$

4.6 Si el origen de energía potencial del ejercicio anterior se sitúa en el punto (0, 0), calcula las energías potenciales en *A* y en *B*.

Por definición, la energía potencial de *A* es igual al trabajo realizado por el campo para llevar la partícula desde el origen de energías potenciales (origen) hasta *A*. Por lo tanto, siguiendo el mismo razonamiento del problema anterior, se tiene:

$$E_P(A) = \vec{F}\int_A^0 d\vec{r} = \vec{F}\cdot(r_0 - r_A) = (3\vec{i} + 9\vec{j})\cdot(-2\vec{i} - 3\vec{j}) = -6 - 27 = -33 \text{ J}$$

$$E_P(B) = \vec{F}\int_B^0 d\vec{r} = \vec{F}\cdot(r_0 - r_B) = (3\vec{i} + 9\vec{j})\cdot(-6\vec{i} - 2\vec{j}) = -18 - 18 = -36 \text{ J}$$

4.7 En los vértices *A*, *B* y *C* de un cuadrado de 10 m de lado, existen masas de 10, 20 y 30 kg, respectivamente. Calcula el trabajo que hay que hacer para desplazar una masa de 0,1 kg desde el centro del cuadrado al vértice *D*.

El trabajo se corresponde con la diferencia de energía potencial gravitatoria de la masa de 0,1 kg cuando ocupa el centro y cuando ocupa el vértice *D*. Por otra parte, la energía potencial gravitatoria en el centro es igual a la suma de las energías potenciales gravitatorias que han creado las masas en *A*, *B* y *C*:

$$E_p = -Gm\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{r_i} = -Gm\left(\frac{M_A}{r_A} + \frac{M_B}{r_B} + \frac{M_C}{r_C}\right)$$

Para la partícula situada en el centro *O* y en *D*, la energía potencial sería:

$$E_p(O) = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}1\left(\frac{10 + 20 + 30}{7{,}07}\right) = -5{,}66 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

$$E_p(D) = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}1\left(\frac{10}{10} + \frac{20}{\sqrt{200}} + \frac{30}{10}\right) = -3{,}61 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

Dado que el trabajo es la diferencia de energías potenciales inicial y final, se tendría:

$$W_{O\to D} = E_p(O) - E_p(D) = -2{,}05 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

4.8 Resuelve de nuevo el ejercicio propuesto 7 empleando ahora el concepto de potencial gravitatorio.

El planteamiento es el mismo, pero empleando el concepto de potencial gravitatorio. Una vez calculada la diferencia de potencial, basta con multiplicar esta por la masa transportada. Así, el potencial gravitatorio es:

$$V_G = -G\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{r_i} = -G\left(\frac{M_A}{r_A}+\frac{M_B}{r_B}+\frac{M_C}{r_C}\right)$$

que para el centro del cuadrado y para el vértice *D* resultan:

$$V_G(O) = -6{,}67\cdot 10^{-11}\left(\frac{10+20+30}{7{,}07}\right) = -5{,}66\cdot 10^{-10}\ \text{J kg}^{-1}$$

$$V_G(D) = -6{,}67\cdot 10^{-11}\left(\frac{10}{10}+\frac{20}{\sqrt{200}}+\frac{30}{10}\right) = -3{,}61\cdot 10^{-10}\ \text{J kg}^{-1}$$

La diferencia de potencial gravitatorio entre los dos puntos es $-2{,}05\cdot 10^{-10}$ J kg^{-1} y la diferencia de energía potencial sería:

$$W_{O\to D} = E_p(O) - E_p(D) = -\Delta V_G m = -2{,}05\cdot 10^{-10}\cdot 0{,}1 = -2{,}05\cdot 10^{-11}\ \text{J}$$

4.9 Sabiendo que la distancia media de la Tierra a la Luna es de $3{,}84\cdot 10^8$ m, calcula el potencial gravitatorio en el punto situado entre la Tierra y la Luna en el que $\vec{g} = 0$.

En primer lugar, hay que situar en la recta Tierra-Luna el punto en el que el campo gravitatorio terrestre y lunar tiene igual módulo y sentido contrario. Si ese punto está a una distancia *x* de la Tierra:

$$G\frac{M_T}{x^2} = G\frac{M_L}{(d-x)^2}$$

$$\frac{M_T}{x^2} = \frac{M_L}{(d-x)^2}$$

$$\frac{M_T}{M_{L\ T}} = 81{,}25$$

$$\frac{81{,}25}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2}$$

Sustituyendo *d* por su valor, se tiene:

$$\frac{81{,}25}{x^2} = \frac{1}{(3{,}84\cdot 10^8 - x)^2}$$

$$80{,}25x^2 - 6{,}24\cdot 10^{10}x + 1{,}2\cdot 10^{19} = 0$$

$$x = 3{,}45\cdot 10^8\ \text{m de la Tierra y } 3{,}9\cdot 10^7\ \text{m de la Luna}$$

El potencial gravitatorio en este punto será:

$$V_G = -6{,}67\cdot 10^{-11}\left(\frac{M_T}{3{,}45\cdot 10^8}+\frac{M_L}{3{,}9\cdot 10^7}\right) = -1{,}28\cdot 10^6\ \text{J kg}^{-1}$$

4.10 Calcula si una nave espacial lanzada desde la Luna con la velocidad de escape lunar escaparía de la atracción de la Tierra.

No escaparía, dado que la energía cinética que tendría que tener debería compensar, además del campo gravitatorio lunar, al campo gravitatorio terrestre en la órbita lunar.

4.11 La masa del sistema solar está prácticamente concentrada en el Sol. Calcula la velocidad con la que hay que lanzar una nave desde la Tierra para que escape del sistema solar.

Como en el problema anterior, la velocidad de escape del sistema solar para un cuerpo que se lance desde la superficie terrestre es:

$$v_{eL} = \sqrt{2G\frac{M_{Sol}}{R_{OT}}} = \sqrt{2G\frac{1{,}99 \cdot 10^{30}}{1{,}49 \cdot 10^{11}}} = 4{,}22 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$$

4.12 Indica el tipo de trayectoria que describe una nave espacial de 100 kg de masa situada a 15 000 km del centro de la Tierra y cuya velocidad es de 7293 m s^{-1}.

Dato. M_T = 5,98 · 10^{24} kg

El tipo de órbita viene fijado por la energía mecánica de la nave. Para este caso:

$$E_p = -G\frac{M_T}{R}m = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{1{,}5 \cdot 10^7}100 = -2{,}66 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Y la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}100 \cdot 7293^2 = 2{,}66 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía mecánica es entonces cero y el cuerpo tiene una trayectoria parabólica que le llevará al infinito.

4.13 Un satélite artificial de 800 kg de masa describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra que ocupa uno de sus focos. En el perigeo, a 630 km de altura, su velocidad es de 9,24 · 10^3 m s^{-1}. Calcula la velocidad cuando esté en un punto a una distancia de 17 630 km de la superficie terrestre.

La energía mecánica del satélite es constante en cualquier punto de su trayectoria. Calculándola para el perigeo, se puede deducir la energía cinética y la velocidad en cualquier otro punto de su trayectoria.

En el perigeo:

$$E = E_p + E_c = -G\frac{M_T}{R}m + \frac{1}{2}mv^2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 10^6}800 + \frac{1}{2}800 \cdot (9{,}24 \cdot 10^3)^2 = -1{,}14 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

En el punto a 17 630 km de distancia, la energía potencial es:

$$E_p' = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{24 \cdot 10^6}800 = -1{,}33 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Con lo que la energía cinética será:

$$-1{,}14 \cdot 10^{10} \text{ J} + 1{,}33 \cdot 10^{10} \text{ J} = 1{,}9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

y la velocidad de la nave será:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}9 \cdot 10^9}{800}} = 2180 \text{ m s}^{-1}$$

4.14 Calcula a qué profundidad de la superficie terrestre el campo gravitatorio es igual al existente a una altura igual al radio terrestre.

Si se igualan las expresiones correspondientes a los campos gravitatorios y se despeja:

$$G\frac{M_T}{R_T^2}\frac{R}{R_T} = G\frac{M_T}{4R_T^2} \Rightarrow R = \frac{R_T}{4}$$

La profundidad desde la superficie terrestre será:

$$h = \frac{3R_T}{4}$$

4.15 Se suelta una canica de vidrio de 8 g de masa a 20 cm de distancia de un cable vertical de un montacargas de una mina que tiene una masa de 0,9 kg por metro de longitud. Calcula la fuerza con que el cable y la canica se atraen.

Aplicando el campo gravitatorio creado por un cilindro de gran longitud, según se ha deducido de la aplicación del teorema de Gauss, se tiene:

$$g = \frac{2GM}{RL} = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}}{0{,}2} \cdot 0{,}9 = 6 \cdot 10^{-10}\ \text{N kg}^{-1}$$

La fuerza de atracción entre la canica y el cable será el producto del campo gravitatorio creado por el cable por la masa de la canica: $F = mg = 0{,}008 \cdot 6 \cdot 10^{-10} = 4{,}8 \cdot 10^{-12}$ N

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

CAMPO GRAVITATORIO. CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

4.16 Una masa puntual de 250 kg está situada en el origen de un sistema de coordenadas. Calcula la intensidad del campo gravitatorio en el punto *P*(3, 5, –4).

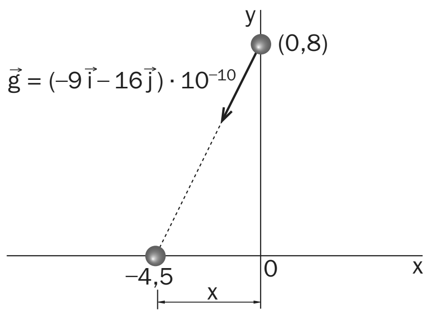
El vector de posición del punto *P*, su módulo y el vector unitario correspondiente son:

$$\vec{r} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}\ ,\ |\vec{r}| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}\ \text{ y }\ \vec{u}_r = \frac{3}{\sqrt{50}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{50}}\vec{j} - \frac{4}{\sqrt{50}}\vec{k}$$

Sustituyendo en la expresión del campo gravitatorio, se tiene:

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{250}{50}\left(\frac{3}{\sqrt{50}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{50}}\vec{j} - \frac{4}{\sqrt{50}}\vec{k}\right) = 4{,}72 \cdot 10^{-11}\left(-3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}\right)\left(\text{N kg}^{-1}\right)$$

4.17 De un campo gravitatorio se sabe que lo ha creado una masa puntual situada en uno de los ejes de coordenadas y que en el punto *P*(0, 8) el vector $\vec{g} = (-9\vec{i} - 16\vec{j}) \cdot 10^{-10}\ \text{N kg}^{-1}$. Calcula la posición y el valor de la masa que lo genera.



La masa se encuentra en uno de los ejes. Dado que el campo gravitatorio no es paralelo al eje *y*, se tiene que la masa ha de estar en el eje *x*, como se muestra en la figura.

La posición del eje en que se encuentra se puede calcular como:

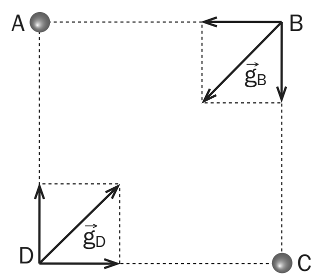
$$\text{tg}\alpha = \frac{-9}{-16} = \frac{x}{-8} \Rightarrow x = -4{,}5\ \text{m}$$

Luego la masa se encuentra en el punto (–4,5; 0).

El valor de la masa se puede calcular a partir del módulo de g:

$$g = G\frac{m}{r^2} \Rightarrow m = \frac{gr^2}{G} = \frac{\sqrt{(-9)^2 + (-16)^2} \cdot 10^{-10} \cdot (4{,}5^2 + 8^2)}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = \frac{1{,}836 \cdot 10^{-9} \cdot 84{,}25}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 2319\ \text{kg}$$

4.18 Dos masas puntuales e iguales se encuentran en vértices opuestos, *A* y *C*, de un cuadrado de 2 m de lado. Calcula el valor del campo en los otros vértices del cuadrado.



El campo creado por las masas de *A* y *C* en los puntos *B* y *D* de la figura son la suma de los campos creados por cada masa:

$$\vec{g}_B = -G\frac{m}{4}\vec{i} - G\frac{m}{4}\vec{j} = -G\frac{m}{4}(\vec{i} + \vec{j})\ \ (\text{N kg}^{-1})$$

$$\vec{g}_D = G\frac{m}{4}\vec{i} + G\frac{m}{4}\vec{j} = G\frac{m}{4}(\vec{i} + \vec{j})\ \ (\text{N kg}^{-1})$$

4.19 Calcula el campo gravitatorio creado por el Sol en los puntos de la órbita terrestre.

Hay que sustituir la masa del Sol y la distancia del Sol a la Tierra en la expresión del campo gravitatorio:

$$g = G\frac{M}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{1{,}989 \cdot 10^{30}}{(1{,}496 \cdot 10^{11})^2} = 5{,}93 \cdot 10^{-3}\ \text{N kg}^{-1}$$

4.20 Calcula la altura, expresada en función del radio terrestre, en la que:

$$\vec{\mathbf{g}}_\mathbf{T} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\mathbf{g}}_\mathbf{0}$$

Teniendo en cuenta la expresión del campo terrestre:

$$-G\frac{M_T}{d^2}\vec{u}_r = -\frac{1}{2}G\frac{M_T}{{R_T}^2}\vec{u}_r \Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{2\,R^2_T} \Rightarrow d = \sqrt{2}\,R_T$$

Dado que esta distancia incluye al radio de la Tierra, la altura sobre la superficie será:

$$d = R_T + h \quad \Rightarrow h = (\sqrt{2} - 1)R_T$$

4.21 Calcula la profundidad, expresándola en función del radio terrestre y suponiendo que la Tierra es una esfera homogénea, a la que:

$$\vec{\mathbf{g}}_\mathbf{T} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\mathbf{g}}_\mathbf{0}$$

Teniendo en cuenta el campo gravitatorio en un punto del interior de la Tierra, que es el generado por la parte de la masa que se encuentra a distancias inferiores al centro que el punto considerado, se puede escribir la siguiente relación:

$$\vec{g}_I = \frac{r}{R_T}\vec{g}_0 = \frac{1}{2}\vec{g}_0 \Rightarrow r = \frac{R_T}{2}$$

La profundidad será:

$$h = R_T - r = \frac{R_T}{2}$$

4.22 El peso de una nave espacial en un punto *A* del campo gravitatorio terrestre es 10 veces mayor que en otro *B*. ¿Cual es la relación de sus distancias al centro de la Tierra?

El peso de la nave espacial es igual a su masa por la intensidad del campo gravitatorio en cada punto. Si entre dos lugares hay una relación de 10 a 1 en el peso, esa misma relación será la que habrá entre los campos gravitatorios. Por tanto:

$$G\frac{M}{{r_A}^2} = 10 \cdot G\frac{M}{{r_B}^2} \quad \Rightarrow r_A^2 = \frac{r_B^2}{10} \quad \Rightarrow r_B = \sqrt{10}\ r_A$$

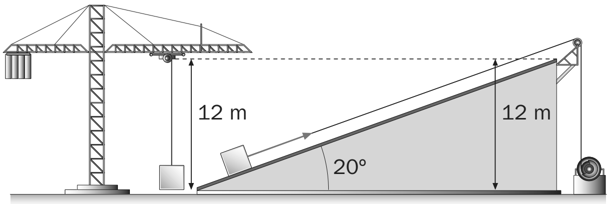
4.23 Una masa cae desde 600 m de altura y con una aceleración de 5,85 m s^{-2} sobre la superficie de un planeta que tiene un radio $R_P = 0{,}27\ R_T$. Calcula la masa del planeta en relación con la de la Tierra.

La ecuación de la aceleración gravitatoria es equivalente para los dos planetas; dado que la altura considerada es muy inferior al radio del planeta, planteando las ecuaciones y sustituyendo los valores indicados, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} g_T = G\dfrac{M_T}{{R_T}^2} \\ g_P = G\dfrac{M_P}{{R_P}^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{g_T}{g_P} = \frac{M_T}{M_P}\frac{{R_P}^2}{{R_T}^2} \Rightarrow M_P = \frac{g_P}{g_T}\cdot\left(\frac{R_P}{R_T}\right)^2 M_T = \frac{5{,}85}{9{,}81}\cdot 0{,}27^2\ M_T \Rightarrow M_P = 0{,}043\ M_T$$

CAMPOS CONSERVATIVOS. ENERGÍA POTENCIAL. POTENCIAL GRAVITATORIO

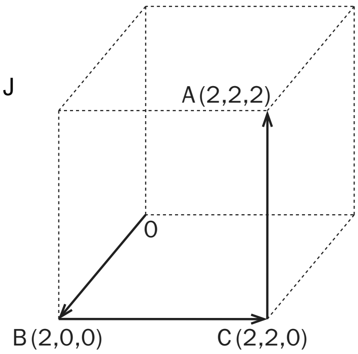
4.24 El campo gravitatorio, en ausencia de rozamiento, es conservativo. Calcula el trabajo necesario para subir 12 m una carga de 200 kg con una grúa que la iza verticalmente o deslizándose por un plano inclinado de 20º.



Dado que el campo gravitatorio es conservativo, el trabajo será igual al incremento de energía potencial. Por tanto, el trabajo en ambos casos será:

$$W = \Delta E_P = mgh = 200 \cdot 9{,}8 \cdot 12 = 23\ 520\ \text{J}$$

4.25 Una caja cúbica de 2 m de arista está situada en un campo de fuerzas $\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ en el sistema de coordenadas definido por sus aristas. Comprueba que el campo es conservativo calculando el trabajo que se realiza para llevar la partícula desde el origen (0, 0, 0) a la esquina opuesta (2, 2, 2) directamente y siguiendo las aristas.



En la figura, se observan los dos caminos posibles; en el camino directo:

$$W_{0\to A} = \int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}\int_O^A d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{r}_A = (2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) = 4 + 6 - 8 = 2\ \text{J}$$

Cuando se lleva a través de las aristas, se tiene:

$$W_{0\to A} = W_{0\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to A}$$

Los trabajos parciales son:

$$W_{0\to B} = \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}\int_O^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{r}_B = (2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot 2\vec{i} = 4\ \text{J}$$

$$W_{B\to C} = \int_B^C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}\int_B^C d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_C - \vec{r}_B) = (2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot 2\vec{j} = 6\ \text{J}$$

$$W_{C\to A} = \int_C^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}\int_C^A d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_A - \vec{r}_C) = (2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot 2\vec{k} = -8\ \text{J}$$

El trabajo total será:

$$W_{0\to A} = W_{0\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to A} = 4 + 6 - 8 = 2\ \text{J}$$

4.26 En un campo conservativo creado por una fuerza constante de módulo 20 N, el trabajo realizado para ir desde el punto (2, 3, 4) al punto (6, 3, 1) es 80 J. Calcula el ángulo que forma la trayectoria con la fuerza.

El trabajo es un producto escalar, de manera que se puede establecer la siguiente relación:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{r}|} = \frac{80}{20 \cdot \sqrt{(6-2)^2 + (3-3)^2 + (1-4)^2}} = 0{,}8 \Rightarrow \alpha = 36{,}9º$$

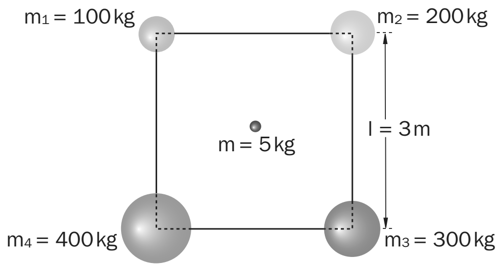
4.27 Calcula el trabajo necesario para llevar una partícula de 2 kg de masa desde el punto (3, 2, 5) al punto (2, –5, 3) en el campo gravitatorio creado por una esfera de 5000 kg que ocupa el origen de coordenadas.

El trabajo será equivalente al incremento de energía potencial. Por tanto:

$$W = \Delta E_P = E_{P\,(3,2,5)} - E_{P\,(2,-5,3)} = -GmM\left(\frac{1}{3^2+2^2+5^2} - \frac{1}{2^2-5^2+3^2}\right) = 0\,J$$

Dado que la distancia al origen es igual para el punto inicial y el final, no hay que hacer trabajo para mover la masa.

4.28 Calcula la energía potencial de una masa de 5 kg que se encuentra en el centro de un cuadrado de 3 m de lado cuyos vértices están ocupados por masas de 100, 200, 300 y 400 kg.



La energía potencial gravitatoria de la masa situada en el centro del cuadrado es la generada por las masas que se encuentran en los vértices:

$$E_P = m \cdot V = m \cdot \left(-G\frac{M_1}{r_1} - G\frac{M_2}{r_2} - G\frac{M_3}{r_3} - G\frac{M_4}{r_4}\right) = -m \cdot \frac{G}{r}\left(M_1 + M_2 + M_3 + M_4\right)$$

$$E_P = -5 \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}}{\frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2}}\left(100+200+300+400\right) = -1{,}57 \cdot 10^{-7}\ J$$

4.29 Los tres vértices de un triángulo equilátero de 5 m de lado están ocupados por masas de 100 kg. Calcula el trabajo necesario para alejar sucesivamente las masas desde los puntos que ocupan hasta el infinito.

La energía necesaria para enviar una masa desde su situación hasta el infinito es equivalente a su energía potencial gravitatoria con signo contrario. Por tanto, para enviar la primera masa es necesario realizar el siguiente trabajo:

$$W_1 = -E_{P_1} = G\frac{m\,m}{r} + G\frac{m\,m}{r} = 2\,G\frac{m\,m}{r} \Rightarrow W_1 = 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{100 \cdot 100}{5} = 2{,}67 \cdot 10^{-7}\ J$$

Tras eliminar la primera partícula, el trabajo necesario para enviar la segunda al infinito es:

$$W_2 = -E_{P_2} = G\frac{m\,m}{r} \Rightarrow W_2 = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{100 \cdot 100}{5} = 1{,}33 \cdot 10^{-7}\ J$$

Tras eliminar la segunda partícula solo queda una tercera que no se encuentra en ningún campo gravitatorio aparte del suyo propio. Por tanto,

$$W_3 = 0\ J$$

4.30 ¿Desde qué altura hay que soltar un cuerpo sobre la superficie lunar para que llegue a ella con la misma velocidad que llega a la Tierra cuando se suelta desde 200 m?

Durante la caída de una masa en un campo gravitatorio, se pueden aplicar las ecuaciones del *mrua*; por tanto:

$$v = \sqrt{2gh} \Rightarrow \sqrt{2\,g_{0(L)}\,h_L} = \sqrt{2\,g_{0(T)}\,h_T} \Rightarrow h_L = \frac{g_{0(T)}}{g_{0(L)}} h_T$$

La aceleración de la gravedad en la Luna es: $g_{0(L)} = G\dfrac{M_L}{R_L^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\dfrac{7{,}36 \cdot 10^{22}}{(1{,}73 \cdot 10^6)^2} = 1{,}64 \text{ m s}^{-2}$

Sustituyendo este valor en la ecuación anterior, se tiene: $h_L = \dfrac{9{,}81}{1{,}64} h_T = 6\ h_T = 6 \cdot 200 = 1200 \text{ m}$

4.31 En la representación gráfica del campo gravitatorio creado por una masa puntual, la línea de $V_G = -6 \cdot 10^7$ J kg^{-1} es una circunferencia de 8 cm de radio. Calcula el radio y dibuja las líneas correspondientes a los potenciales:

$$\mathbf{V_G = (-2, -4, -8, -10, -12) \cdot 10^7 \text{ J kg}^{-1}}$$

Para el potencial del enunciado, se cumple la relación:

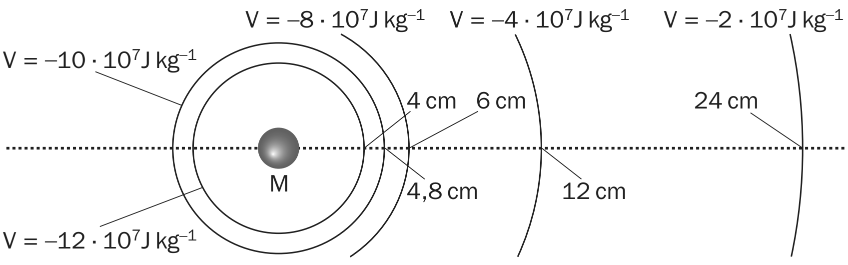
$$V_G = -G\frac{M}{R} \Rightarrow GM = -V_G \cdot R = (-6) \cdot 10^7 \cdot 0{,}08 = 4{,}8 \cdot 10^6 \text{ J m kg}^{-1}$$

Por tanto, para los diferentes valores se tiene que cumplir la ecuación:

$$V_G \cdot R = -4{,}8 \cdot 10^6 \text{ J m kg}^{-1} \Rightarrow R = \frac{-4{,}8 \cdot 10^6}{V_G} \text{ (m)}$$

El resultado de aplicar esta ecuación a los valores del enunciado son: R = (24; 12; 6; 4,8; 4) cm

La representación gráfica sería:



4.32 Un planeta de las mismas dimensiones que la Tierra tiene una densidad media $d_P = 2\ d_T$. Calcula:

a) ¿A qué distancia de su centro el campo gravitatorio es igual al de la superficie terrestre?

b) ¿A qué altura sobre su superficie el potencial gravitatorio es igual al de la superficie terrestre?

a) El campo gravitatorio en la superficie del segundo planeta tendrá la siguiente aceleración gravitatoria:

$$g_P = G\frac{M_P}{R_P} = G\frac{2\,M_T}{R_T} = 2\ g_0$$

Igualando el campo en el interior del planeta con el de la superficie de la Tierra, se tiene:

$$g_P = g_{0P}\frac{r}{R_P} = g_0 \Rightarrow r = \frac{g_0}{g_{0P}} R_T = \frac{g_0}{2\ g_0} R_T \Rightarrow r = \frac{R_T}{2}$$

b) Igualando el campo en el exterior del planeta con el de la superficie de la Tierra, se tiene:

$$g_P = G\frac{M_P}{r^2} = G\frac{M_P}{R_P{}^2}\frac{R_P{}^2}{r^2} = g_{0P}\frac{R_P{}^2}{r^2} = g_0 \Rightarrow r^2 = \frac{g_{0P}}{g_0} R_P{}^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{g_{0P}}{g_0}}\ R_T$$

$$r = \sqrt{2}\ R_T = R_T + h \Rightarrow h = R_T\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

4.33 Un cuerpo se lanza desde la Tierra con una velocidad igual a la mitad de la velocidad de escape.

a) ¿Hasta qué altura subirá?

b) Si lo que se pretende es ponerlo en órbita circular, ¿cuál será el radio de la misma?

a) La velocidad de lanzamiento y la energía cinéticas serán:

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{R_T}} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m\frac{1}{4}\frac{2\,G\,M_T}{R_T} = \frac{1}{4}G\frac{m\,M_T}{R_T}$$

La energía potencial en el momento del lanzamiento es:

$$E_p = -G\frac{m\,M_T}{R_T}$$

La energía mecánica total del cuerpo será:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{4}G\frac{m\,M_T}{R_T} - G\frac{m\,M_T}{R_T} = \frac{-3}{4}G\frac{m\,M_T}{R_T}$$

El cuerpo subirá hasta que toda la energía mecánica sea energía potencial; por tanto:

$$E = E_p \Rightarrow \frac{-3}{4}G\frac{m\,M_T}{R_T} = -G\frac{m\,M_T}{R_T + h} \Rightarrow R_T + h = \frac{4}{3}R_T \Rightarrow h = \frac{R_T}{3}$$

b) Si se coloca en una órbita circular, el cuerpo tendrá energía cinética y energía potencial. Igualando la energía mecánica de un cuerpo en órbita circular con la energía mecánica calculada anteriormente, se tiene:

$$E_{m\ \text{órbita}} = -\frac{1}{2}G\frac{m\,M_T}{R_0} = \frac{-3}{4}G\frac{m\,M_T}{R_T} \Rightarrow R_0 = \frac{4}{6}R_T$$

En estas condiciones, se tendría un radio de órbita inferior al terrestre, lo que resulta imposible.

4.34 Calcula el potencial gravitatorio en un punto situado a 390 km de altura sobre la superficie terrestre.

El potencial gravitatorio sería:

$$V_G = -G\frac{M_T}{R_T + h} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^{6} + 3{,}9 \cdot 10^{5}} = -5{,}90 \cdot 10^{7}\ \text{J kg}^{-1}$$

4.35 Se quiere lanzar una sonda de 900 kg de masa que llegue hasta los 200 km de altura para realizar algunos experimentos en microgravedad durante su caída. Calcula la velocidad inicial que hay que darle y la energía necesaria.

La energía mecánica durante el lanzamiento ha de ser igual a la energía potencial del punto más alto de su trayectoria. Por tanto:

$$E_{m\ \text{lanzamiento}} = E_{m\ \text{órbita}} \Rightarrow \frac{1}{2}m\,{v_L}^2 - G\frac{m\,M_T}{R_T} = -G\frac{m\,M_T}{R_T + h}$$

Despejando y sustituyendo, se determina la velocidad del lanzamiento:

$$v_L = \sqrt{2\,G\,M_T\frac{h}{R_T(R_T + h)}} = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\frac{2 \cdot 10^{5}}{6{,}37 \cdot 10^{6} \cdot 6{,}57 \cdot 10^{6}}} = 1{,}95 \cdot 10^{3}\ \text{m s}^{-1}$$

La energía cinética del lanzamiento es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}900 \cdot \left(1{,}95 \cdot 10^{3}\right)^2 = 1{,}71 \cdot 10^{9}\ \text{J}$$

4.36 Calcula la diferencia de potencial gravitatorio entre la superficie terrestre y un punto a 350 m de altura sobre la Tierra.

Dado que la variación de altura es pequeña en comparación con el radio de la Tierra, se puede aplicar la siguiente ecuación:

$$\Delta V_G = g_0\, h = 9{,}8 \cdot 350 = 3430 \text{ J kg}^{-1}$$

SATÉLITES ARTIFICIALES

4.37 La densidad media de Júpiter es $d_J = 1{,}33 \cdot 10^3$ kg m^{-3}, y su radio medio, $R_J = 7{,}15 \cdot 10^7$ m. Calcula:

a) La aceleración de la gravedad en su superficie.

b) La velocidad de escape.

a) La aceleración de la gravedad, que es el campo gravitatorio, será:

$$a = g_0 = G\frac{M_J}{R_J^{\,2}} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R_J^{\,3}\, d_J}{R_J^{\,2}} = \frac{4}{3}\pi\, G\, R_J\, d_J \Rightarrow g_0 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}15 \cdot 10^7 \cdot 1{,}33 \cdot 10^3 = 26{,}6 \text{ m s}^{-2}$$

b) La velocidad de escape desde la superficie de Júpiter es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\, G\, M_J}{R_J}} = \sqrt{2\frac{G\, M_J}{R_J^{\,2}} R_J} = \sqrt{2\, g_0\, R_J} \Rightarrow v_e = \sqrt{2 \cdot 26{,}6 \cdot 7{,}15 \cdot 10^7} = 6{,}17 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$$

4.38 Una nave espacial en órbita alrededor de la Luna lanza en sentido contrario a su marcha y con la misma velocidad una sonda de 90 kg, con el fin de que choque contra la superficie lunar. Si la nave está a 200 km de altura, ¿con qué velocidad llegará la sonda al suelo lunar?

La nave lanza la sonda con la misma velocidad que tiene ella y con sentido contrario, de manera que un observador sobre la superficie de la Luna vería la sonda como parada a 200 km de altura y, desde allí, sufrirá una caída libre.

Durante la caída, parte de la energía potencial se convierte en energía cinética hasta que choca con la superficie de la Luna. Por tanto:

$$E_{p0} = E_c + E_{p\,\text{superficie}} \Rightarrow -G\frac{m\, M_L}{R_L + h} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m\, M_L}{R_L} \Rightarrow v = \sqrt{2\, G\, M_L \frac{h}{R_L(R_L + h)}}$$

Sustituyendo los valores del enunciado y de la Luna, del díptico se tiene:

$$v = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{11} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22} \frac{2 \cdot 10^5}{1{,}73 \cdot 10^6\,(1{,}73 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5)}} \Rightarrow v = 7{,}67 \cdot 10^2 \text{ m s}^{-1}$$

4.39 Se llama agujero negro a los cuerpos celestes en cuya superficie la velocidad de escape es igual o superior a la velocidad de la luz. Calcula la densidad que debe tener un cuerpo celeste de 10 km de diámetro para que sea considerado un agujero negro.

Sin contar efectos relativísticos, la velocidad de escape en la superficie de un cuerpo esférico es:

$$v_e = \sqrt{2\, G\frac{M}{R}} = \sqrt{2\, G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\, d}{R}}$$

Despejando y sustituyendo, se tiene:

$$d = \frac{3\, v_e^{\,2}}{8\, G\, \pi\, R^2} = \frac{3 \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2}{8 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \pi \cdot \left(5 \cdot 10^3\right)^2} = 6{,}44 \cdot 10^{18} \text{ kg m}^{-3}$$

4.40 La nave espacial Discovery describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una velocidad de $7,62 \cdot 10^3$ m s^{-1}. Calcula el radio y el período de su órbita.

La velocidad de una órbita circular es aquella que hace que la fuerza centrípeta sea igual a la atracción gravitatoria:

$$G\frac{mM}{{R_O}^2} = \frac{m\,v^2}{R_O} \Rightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{R_O}}$$

Despejando el radio de la órbita y sustituyendo los valores, se tiene:

$$R_O = G\frac{M}{v^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{(7{,}62 \cdot 10^3)^2} = 6{,}87 \cdot 10^6 \text{ m}$$

El período de la órbita se puede calcular a partir de su longitud y de la velocidad orbital:

$$T = \frac{2\pi\,R_O}{v} = \frac{2\pi\,6{,}87 \cdot 10^6}{7{,}62 \cdot 10^3} = 5{,}7 \cdot 10^3 \text{ s}$$

4.41 El primer satélite artificial, Sputnik I, tenía un período de 5770 segundos. Calcula el radio de su órbita utilizando únicamente los valores de g_0 = 9,81 N kg^{-1} y $R_T = 6{,}36 \cdot 10^6$ m.

De la tercera ley de Kepler se determina:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_P}{R_O}^3 \Rightarrow R_O = \sqrt[3]{\frac{T^2\,GM_T}{4\pi^2}}$$

La aceleración de la gravedad se puede relacionar con algunas de estas magnitudes:

$$g_0 = \frac{G\,M_T}{{R_T}^2} \Rightarrow GM_T = g_0\,{R_T}^2$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación y sustituyendo por sus valores, se tiene:

$$R_O = \sqrt[3]{\frac{T^2\,g_0\,{R_T}^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{5770^2 \cdot 9{,}81 \cdot (6{,}36 \cdot 10^6)^2}{4\pi^2}} = 6{,}94 \cdot 10^6 \text{ m}$$

4.42 Un planeta de radio R_P = 5000 km tiene a 200 000 km de distancia un satélite que gira a su alrededor con un período de 15 días y 7,17 horas. Calcula la velocidad de escape desde su superficie.

La velocidad de escape de la superficie de un planeta es:

$$v_e = \sqrt{2\,G\frac{M_P}{R_P}}$$

Aplicando la tercera ley de Kepler, al igual que se ha hecho en el ejercicio anterior, se tiene:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_P}R_0^3 \Rightarrow GM_P = \frac{4\pi^2 R_0^3}{T^2}$$

Sustituyendo en la anterior ecuación, se tiene:

$$v_e = \sqrt{2\,\frac{4\pi^2 R_0^3}{R_P\,T^2}}$$

Sustityendo los valores del enunciado, se tiene:

$$v_e = \sqrt{\frac{8\pi^2 \cdot (2 \cdot 10^8)^3}{5 \cdot 10^6 \cdot (15 \cdot 3600 \cdot 24 + 7{,}17 \cdot 3600)^2}} = 8{,}50 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

4.43 Un satélite de 200 kg está en órbita a 500 km de altura sobre la superficie terrestre. Calcula:

a) La velocidad lineal con la que se mueve.

b) La energía necesaria para ponerlo en órbita.

a) La velocidad de una órbita circular a una altura *h* sobre la superficie terrestre se puede determinar igualando la aceleración gravitatoria con la aceleración centrípeta y sustituyendo los valores del enunciado:

$$G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}=\frac{v^2}{R_T+h}\Rightarrow v=\sqrt{G\frac{M_T}{R_T+h}}\Rightarrow v=\sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}36\cdot 10^{6}+5\cdot 10^{5}}}=7{,}63\cdot 10^{3}\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

b) La energía necesaria para ponerlo en órbita se obtiene del principio de conservación de la energía mecánica.

La energía mecánica en el lanzamiento y en la órbita es la misma:

$$-G\frac{M_T\,m_s}{R_T}+E_{lanzamiento}=-\frac{1}{2}G\frac{M_T\,m_s}{(R_T+h)}\Rightarrow E_{lanzamiento}=GM_Tm_s\left[\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2(R_T+h)}\right]$$

Sustituyendo, se tiene:

$$E_{lanzamiento}=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 200\left[\frac{1}{6{,}36\cdot 10^{6}}-\frac{1}{2\,(6{,}36\cdot 10^{6}+5\cdot 10^{5})}\right]=6{,}73\cdot 10^{9}\ \mathrm{J}$$

4.44 Un sistema meteorológico consta de 24 satélites que orbitan la Tierra a 1000 km de altura sobre la superficie terrestre. Calcula la velocidad y el período de estos satélites.

La velocidad en una órbita circular viene dada por:

$$v=\sqrt{G\frac{M_T}{R_O}}=\sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}36\cdot 10^{6}+1\cdot 10^{6}}}=7{,}36\cdot 10^{3}\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

El período se puede obtener de la tercera ley de Kepler:

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_T}R_0^3}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}\left(7{,}36\cdot 10^{6}\right)^3}=6{,}3\cdot 10^{3}\ \mathrm{s}$$

4.45 Se llama primera velocidad cósmica a la velocidad necesaria para mantener un satélite en órbita rasante sobre la superficie del planeta. Calcula la primera velocidad cósmica de la Tierra.

La velocidad para mantener una velocidad rasante será:

$$v=\sqrt{G\frac{M_T}{R_O}}=\sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}36\cdot 10^{6}}}=7{,}92\cdot 10^{3}\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

4.46 ¿Es posible poner una nave espacial en órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 8,5 km s^{-1}?

Para esta velocidad, el radio de la órbita sería:

$$R_O=\frac{G\,M_T}{v_0^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{8500^2}=5{,}5\cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$$

Este radio es inferior al de la Tierra, de manera que no es posible tener esa velocidad orbital.

4.47 Un satélite artificial de 520 kg de masa está en órbita terrestre a 600 km de altura. Calcula, utilizando solamente los valores g_0 = 9,81 N kg^{-1} y R_T = 6,36 · 10^6 m, su energía mecánica y su momento angular con respecto al centro de la Tierra.

La energía mecánica de un satélite en órbita circular es igual a la mitad de su energía potencial, es decir:

$$E_m = -\frac{1}{2} G \frac{m M_T}{R_0}$$

El producto G M_T se puede poner en función de g_0 y de R_T teniendo en cuenta la siguiente relación:

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow G M_T = g_0 R_T^2$$

Sustituyendo esta relación en la primera ecuación, se tiene:

$$E_m = -\frac{1}{2} \frac{m g_0 R_T^2}{R_0} = -\frac{1}{2} \frac{520 \cdot 9{,}81 \cdot (6{,}36 \cdot 10^6)^2}{6{,}36 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5} = -1{,}48 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

El momento angular y su módulo se definen de la siguiente manera:

$$\vec{L} = m\vec{v} \times \vec{r} \Rightarrow \left|\vec{L}\right| = m v_O R_O$$

La velocidad en la órbita se define como:

$$v_O = \sqrt{\frac{G M_T}{R_0}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_0}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot (6{,}36 \cdot 10^6)^2}{6{,}36 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5}} = 7{,}55 \cdot 10^3\ \text{m s}^{-1}$$

El momento angular será:

$$\left|\vec{L}\right| = 520 \cdot 7{,}55 \cdot 10^3 \cdot 6{,}96 \cdot 10^6 = 2{,}73 \cdot 10^{13}\ \text{kg m s}^{-1}$$

4.48 Calcula el radio y la masa de un asteroide esférico de densidad similar a la de la Tierra, 5500 kg m^{-3}, para que un hombre pueda poner en órbita circular a su alrededor una piedra de 100 g, lanzándola horizontalmente con la mano a 40 m s^{-1}.

El radio del asteroide será idéntico al de la órbita, dado que la piedra se lanza horizontalmente. Empleando la ecuación de la velocidad orbital y calculando la masa del asteroide en función de su densidad, se tiene:

$$v_0 = \sqrt{\frac{G M_A}{R_A}} = \sqrt{\frac{G \frac{4}{3} \pi R_A^3\, d}{R_A}} = \sqrt{\frac{4}{3} \pi G R_A^2\, d} \Rightarrow R_A = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{4}{3} \pi G d}} = \frac{40}{\sqrt{\frac{4}{3} \pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5500}} = 3{,}23 \cdot 10^4\ \text{m}$$

La masa del asteroide será:

$$M_A = \frac{4}{3} \pi R_A^3\, d = \frac{4}{3} \pi\, (3{,}23 \cdot 10^4)^3 \cdot 5500 = 7{,}76 \cdot 10^{17}\ \text{kg}$$

4.49 Demuestra que la energía que hay que comunicar a un satélite de masa *m* que se encuentra en una órbita de radio $R_{órb\,1}$ para colocarlo en otra de radio $R_{órb\,2}$ es:

$$\mathbf{E = \frac{G M_T m}{2} \left(\frac{1}{R_{órb\,1}} - \frac{1}{R_{órb\,2}} \right)}$$

La energía que hay que suministrar es igual a la diferencia de energía mecánica entre las dos órbitas:

$$E_T = E_{órb\,2} - E_{órb\,1} = -\frac{1}{2} \frac{G M_T m}{R_{órb\,2}} + \frac{1}{2} \frac{G M_T m}{R_{órb\,1}} = \frac{G M_T m}{2} \left(\frac{1}{R_{órb\,1}} - \frac{1}{R_{órb\,2}} \right)$$

4.50 Para hacer descender una nave espacial cuando está en órbita a 50 000 km del centro de la Tierra, se le hace perder, mediante retrocohetes, la mitad de su energía cinética. Calcula el radio de la nueva órbita.

La energía mecánica del satélite en su órbita es:

$$E_{m1} = E_{p1} + E_{c1} = -G\frac{M_T\,m}{R_{órb\,1}} + \frac{1}{2}\frac{G\,M_T\,m}{R_{órb\,1}} = -\frac{1}{2}\frac{G\,M_T\,m}{R_{órb\,1}}$$

Si la energía cinética se reduce a la mitad, se tendrá:

$$E_{m2} = E_p + \frac{1}{2}E_{c1} = -G\frac{M_T\,m}{R_{órb\,1}} + \frac{1}{4}\frac{G\,M_T\,m}{R_{órb\,1}} = -\frac{3}{4}\frac{G\,M_T\,m}{R_{órb\,1}}$$

Esta energía se corresponderá con la energía mecánica de la nueva órbita del satélite; por tanto:

$$E_{m2} = -\frac{3}{4}\frac{G\,M_T\,m}{R_{órb\,1}} = -\frac{1}{2}\frac{G\,M_T\,m}{R_{órb\,2}} \Rightarrow R_{órb\,2} = \frac{4}{6}R_{órb\,1} = \frac{4}{6}5\cdot 10^7 = 3{,}33\cdot 10^7\ \text{m}$$

4.51 ¿A qué distancia de la Tierra la velocidad orbital es igual a la mitad de la velocidad de escape en su superficie?

La velocidad orbital y la velocidad de escape terrestre son:

$$v_O = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_o}}\ \ \text{y}\ \ v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{R_T}}$$

Igualando la velocidad orbital con la mitad de la velocidad de escape, se tiene:

$$\sqrt{\frac{G\,M_T}{R_o}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{R_T}} \Rightarrow R_O = R_T + h = 2\,R_T \Rightarrow h = R_T$$

4.52 A un satélite que está en órbita circular de radio $R_{órb\ 1}$ se le aumenta, mediante los cohetes propulsores, la velocidad en un 10%, y después, mediante cohetes de maniobra que no modifican su energía cinética, se corrige su trayectoria para colocarlo en otra órbita de radio $R_{órb\ 2}$. Calcula la relación entre ambos radios.

La energía mecánica del satélite en su primera órbita es:

$$E_{m1} = E_{p1} + E_{c1} = -G\frac{M_T\,m}{R_{órb\,1}} + \frac{1}{2}\frac{G\,M_T\,m}{R_{órb\,1}} = -\frac{1}{2}\frac{G\,M_T\,m}{R_{órb\,1}}$$

Si la velocidad se aumenta un 10%, pasará a ser 1,1 v, y la energía cinética pasará a ser 1,21 veces la inical; por tanto, se tendrá:

$$E_{m2} = E_p + 1{,}21\,E_{c1} = -G\frac{M_T\,m}{R_{órb\,1}} + 1{,}21\frac{1}{2}\frac{G\,M_T\,m}{R_{órb\,1}} = -0{,}395\frac{G\,M_T\,m}{R_{órb\,1}}$$

Esta energía se corresponderá con la energía mecánica de la nueva órbita del satélite; por tanto:

$$E_{m2} = -0{,}395\frac{G\,M_T\,m}{R_{órb\,1}} = -\frac{1}{2}\frac{G\,M_T\,m}{R_{órb\,2}} \Rightarrow R_{órb\,2} = \frac{R_{órb\,1}}{2\cdot 0{,}395} = 1{,}266\,R_{órb\,1}$$

4.53 Repite el problema anterior para un aumento de la velocidad del 41,42%.

Si se aumenta la velocidad a 1,4142 v, la energía cinética aumentará para ser el doble.

$$E_{m2} = E_p + 2\,E_{c1} = -G\frac{M_T\,m}{R_{órb\,1}} + \frac{G\,M_T\,m}{R_{órb\,1}} = 0$$

Al ser su energía mecánica nula, el satélite no estará ligado a la Tierra y describirá una trayectoria parabólica.

4.54 Una empresa de telecomunicaciones quiere poner una serie de satélites en órbita con un período de 6 horas. Para ello, puede colocarlos directamente en órbita desde la Tierra o bien transportarlos en el transbordador espacial hasta la Estación Espacial Internacional (ISS), a 390 km de altura, como paso intermedio, y lanzarlos desde allí. Calcula la energía de satelización necesaria en ambos casos si la masa del satélite es de 650 kg.

La energía, para colocarlo en órbita en una sola etapa, será:

$$E_S = E_{MOF} - E_{MT} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T\, m}{R_{OF}} + G \frac{M_T\, m}{R_T} = G\, M_T\, m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2\, R_{OF}}\right)$$

Para colocarlo en dos etapas, la energía será:

$$E_S = E_{S\,1} + E_{S\,2} = G\, M_T\, m \left[\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2\, R_{O1}}\right) + \left(\frac{1}{2\, R_{O1}} - \frac{1}{2\, R_{OF}}\right)\right] = G\, M_T\, m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2\, R_{OF}}\right)$$

En ambos casos, la energía de satelización es la misma.

Dado que el período de la órbita es de 6 horas, el radio orbital es:

$$R_{OF} = \sqrt[3]{\frac{G\, M_T}{4\, \pi^2} T^2} = 1{,}68 \cdot 10^7 \text{ m}$$

La energía de satelización será:

$$E_S = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 650 \left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 1{,}68 \cdot 10^7}\right) = 3{,}30 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

4.55 Repite el ejercicio anterior pero ahora considerando que el satélite, cuando se lanza desde la Tierra, lleva, como elementos de protección y propulsión, una masa adicional de 2200 kg, que no lleva cuando viaja en las bodegas del transbordador.

La energía de la primera satelización es mayor:

$$E_S = G\, M_T\, m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2\, R_{O1}}\right) = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 2850 \left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 6{,}76 \cdot 10^6}\right) = 9{,}44 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

La energía de la segunda satelización sería:

$$E_S = G\, M_T\, m' \left(\frac{1}{2\, R_{O1}} - \frac{1}{2\, R_{OF}}\right) = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 650 \left(\frac{1}{2 \cdot 6{,}76 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 1{,}68 \cdot 10^7}\right) = 1{,}15 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

La energía de satelización total es: $9{,}44 \cdot 10^{10} + 1{,}15 \cdot 10^{10} = 1{,}06 \cdot 10^{11}$ J

4.56 Dos trozos de chatarra espacial chocan a 100 km de altura sobre la superficie terrestre. Como consecuencia del choque quedan instantáneamente en reposo. Calcula la velocidad con la que llegarían a la Tierra si la atmósfera no los frenara.

En este caso, la energía mecánica de la chatarra es igual a la energía potencial que tiene, que se convierte en energía potencial y energía cinética en la superficie de la Tierra. Por tanto, se puede establecer la siguiente igualdad:

$$\left.\begin{aligned} E_{mI} &= -G \frac{M_T\, m}{R_T + h} \\ E_{mF} &= -G \frac{M_T\, m}{R_T} + \frac{1}{2} m v^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{2\, G\, M_T \frac{h}{R_T (R_T + h)}}$$

Sustituyendo los valores, se tiene la velocidad de la chatarra en la superficie de la Tierra:

$$v = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \frac{10^5}{6{,}37 \cdot 10^6 (6{,}37 \cdot 10^6 + 10^5)}} = 1{,}39 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

FORMA Y ENERGÍA DE LAS TRAYECTORIAS

4.57 Una nave espacial de 900 kg de masa se encuentra en órbita elíptica alrededor de la Tierra de manera que en el apogeo tiene una velocidad $v_a = 7{,}28 \cdot 10^3$ m s^{-1} y que es igual a 0,8 v_0, siendo v_0 la velocidad correspondiente a una órbita circular. Calcula la energía mecánica de la nave en el apogeo.

La velocidad orbital para una órbita circular sería:

$$v_0 = \frac{7{,}28 \cdot 10^3}{0{,}8} = 9{,}1 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

La energía cinética que le correspondería sería:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} 900 \cdot (9{,}1 \cdot 10^3)^2 = 3{,}726 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Como en una órbita circular la energía cinética es la mitad en módulo de la energía potencial y de signo contrario, por tanto, la energía potencial en el apogeo sería: $-7{,}45 \cdot 10^{10}$ J

La energía cinética de la nave en órbita elíptica es:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} 900 \cdot (7{,}28 \cdot 10^3)^2 = 2{,}38 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

La energía mecánica de la nave en el apogeo y en cualquier punto de la trayectoria es:

$$E = -7{,}45 \cdot 10^{10} + 2{,}38 \cdot 10^{10} = -5{,}06 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

4.58 El módulo lunar despegó de la Luna para acoplarse a la nave Apolo XI que orbitaba a 110 km de su superficie. Determina su velocidad de satelización.

Utilizamos los datos $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1{,}73 \cdot 10^6$ m. La energía total se conserva entre el punto de salida de la superficie lunar, A, y cualquier punto de la órbita. En el punto A de salida de la superficie lunar el módulo tendrá una energía total:

$$E_{TA} = \frac{1}{2} mv_{As}^2 - \frac{GM_L m}{R_L}$$

En un punto B cualquiera de la órbita su energía total será:

$$E_{TB} = -\frac{GM_L m}{2r}$$

Se cumple por tanto:

$$\frac{1}{2} mv_s^2 - \frac{GM_L m}{R_L} = -\frac{GM_L m}{2r}$$

$$v = \sqrt{2GM_L\left(\frac{1}{R_L} - \frac{1}{2r}\right)} = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\left(\frac{1}{1{,}73 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 1{,}84 \cdot 10^6}\right)} = 1730 \text{ m s}^{-1}$$

4.59 Los cometas tienen alrededor del Sol órbitas elípticas muy excéntricas. Un cuerpo celeste que se mueve en las proximidades del Sol tiene, cuando está a 2 UA, una velocidad de $3{,}5 \cdot 10^4$ m s^{-1}. ¿Es un cometa?

Dato. 1 UA = $1{,}50 \cdot 10^{11}$ m

La energía mecánica del cuerpo celeste es:

$$E_m = -G\frac{M_T m}{R} + \frac{1}{2} mv^2 = m\left(-G\frac{M_T}{R} + \frac{1}{2} mv^2\right)$$

Si el valor entre paréntesis es negativo, la energía mecánica también lo será y la trayectoria será una elipse. Si fuera igual a cero, sería una parábola, y si fuera positiva sería una hipérbola. Sustituyendo, se tiene:

$$-G\frac{M_T}{R} + \frac{1}{2} mv^2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{1{,}99 \cdot 10^{30}}{3 \cdot 10^{11}} + \frac{1}{2}(3{,}5 \cdot 10^4)^2 = 1{,}7 \cdot 10^8 \text{ J kg}^{-1}$$

Dado que el valor es positivo, la trayectoria es una hipérbola y no será un cometa.

4.60 Phobos, satélite de Marte, tiene un período T = 27 600 s y un radio orbital de 9400 km. Sabiendo que el diámetro de Marte es 6780 km, calcula su densidad.

Teniendo en cuenta que la órbita se puede considerar circular, la atracción gravitatoria será igual a la fuerza centrípeta:

$$G\frac{M_M\,M_F}{R_0} = M_F\ \omega^2\ R0 = M_F\ \frac{4\ \pi^2}{T^2}\ R_0 \Rightarrow M_M = \frac{4\ \pi^2}{G\ T^2}\ R_0^3 = 6{,}45 \cdot 10^{23}\ \text{kg}$$

La densidad que tendrá Marte será:

$$d = \frac{M_M}{\frac{4}{3}\pi R_M^3} = \frac{6{,}45 \cdot 10^{23}}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{6{,}78 \cdot 10^6}{2}\right)^3} = 3{,}95 \cdot 10^3\ \text{kg m}^{-3}$$

4.61 Un trozo de chatarra espacial, inicialmente en reposo y muy alejado de la Tierra, es atraído por el campo gravitatorio terrestre.

a) ¿Qué velocidad llevará en el punto *A* de coordenadas (3, 3, –3) · 10^7 m con respecto al centro de la Tierra?

b) Posteriormente pasó por *B*, de coordenadas (1, –1, 5) · 10^7 m. ¿Qué velocidad llevaba entonces?

c) La trayectoria entre *A* y *B*, ¿a qué cónica pertenece?

a) La energía mecánica se conserva y es cero, dado que permanecía en reposo en el infinito. Cuando esté en el punto *A*, su energía cinética será:

$$E_c = -E_p \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{M_T\ m}{R} \Rightarrow v = \sqrt{2G\frac{M_T}{R}} = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{\sqrt{3^2+3^2+3^2}\ \cdot 10^7}} = 3{,}92 \cdot 10^3\ \text{m s}^{-1}$$

b) El punto *B* se encuentra a una distancia idéntica a la del punto *A*. Por tanto, la velocidad de la chatarra será la misma.

c) La energía mecánica de los fragmentos es cero, luego se tratará de una parábola.

TEOREMA DE GAUSS

4.62 En la novela *Cita con Rama*, Arthur C. Clarke propone una gran nave extraterrestre esférica y hueca, donde seres ajenos al sistema solar viajan por el universo a la búsqueda de planetas donde poder desarrollarse. ¿Cuánto vale la aceleración de la gravedad en el interior de dicha nave?

La aceleración de la gravedad en el interior de un cuerpo depende de la cantidad de masa que hay entre la posición en que se encuentra el punto donde se quiere medir el campo y el centro o eje del cuerpo. Dado que es hueco, esta masa será nula y la aceleración de la gravedad también lo será. En la novela la nave gira sobre eje, lo que podría producir una gravedad artificial.

4.63 Calcula con qué fuerza por unidad de longitud se atraen dos cables paralelos y separados 20 cm de un montacargas de una mina que tienen una masa de 7 kg m^{-1}.

El campo que genera una distribución lineal de masa es:

$$g = \frac{2G}{R}\frac{M}{L}$$

La fuerza gravitatoria por unidad de longitud en el otro cable será:

$$\frac{F}{L} = g\frac{M}{L} \Rightarrow \frac{F}{L} = \left(\frac{2G}{R}\frac{M}{L}\right)\frac{M}{L} = \frac{2G}{R}\left(\frac{M}{L}\right)^2$$

$$\frac{F}{L} = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}}{0{,}2}\,7^2 = 3{,}27 \cdot 10^{-8}\ \text{N m}^{-1}$$

PROBLEMAS DE SÍNTESIS

4.64 En una región del espacio suficientemente alejada para que se pueda considerar que el campo gravitatorio externo es nulo, se fijan dos masas puntuales M_A y M_B de 4000 y 9000 kg, respectivamente, separadas por una distancia de 25 m.

Otra masa *m* de 0,1 kg se encuentra libre y en reposo en un punto *P* del campo creado por ambas.

a) ¿Por qué han de estar fijas M_A y M_B?

b) ¿Dónde se encuentra el punto *P*?

c) ¿Cuánto vale el potencial gravitatorio en *P* y la energía potencial de la masa en ese punto?

d) Si mediante un pequeño impulso se empuja *m* hacia la masa M_B, ¿qué aceleración tiene y qué velocidad lleva cuando esté a 5 m de ella?

e) ¿Cuánto vale la suma de todas las fuerzas que actúan sobre las tres partículas?

a) Es necesario que estén fijas para que no se aproximen entre sí y para que el campo gravitatorio en todo el espacio se mantenga constante y pueda tenerse a la masa *m* en reposo.

b) El punto *P* tiene que estar en el segmento que une las dos masas y se encontrará a una distancia *x* de la masa *A*.

Si las dos fuerzas gravitatorias se igualan, se tiene:

$$G\frac{M_A\ m}{(d-x)^2} = G\frac{M_B\ m}{x^2} \Rightarrow M_A\ x^2 = M_B(d-x)^2$$

Despejando el valor de la posición, se tiene:

$$x = \frac{\sqrt{\frac{M_A}{M_B}}-1}{\frac{M_A}{M_B}-1}d = \frac{\sqrt{\frac{4000}{9000}}-1}{\frac{4000}{9000}-1}\cdot 25 = 15\ \text{m}$$

El punto *x* se encuentra entre las dos masas a una distancia de 15 m de la masa mayor.

c) El potencial de ese punto y la energía potencial son:

$$V = -G\frac{M_A}{d-x} - G\frac{M_B}{x} = -G\left(\frac{M_A}{d-x}+\frac{M_B}{x}\right) = -6{,}67\cdot 10^{-11}\left(\frac{4000}{25-15}+\frac{9000}{15}\right) = -6{,}67\cdot 10^{-8}\ \text{J kg}^{-1}$$

$$Ep = V\ m = -6{,}67\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}1 = -6{,}67\cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

d) La aceleración que tendrá la masa cuando esté a 5 m será:

$$a = G\frac{M_B}{x^2} - G\frac{M_A}{(d-x)^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\left(\frac{9000}{5^2}-\frac{4000}{(25-5)^2}\right) = 2{,}33\cdot 10^{-8}\text{m s}^{-2}$$

El empujón se considera que no aporta energía cinética a la partícula, de manera que su energía cinética será igual a la variación de la energía potencial:

$$V = -G\frac{M_A}{d-x} - G\frac{M_B}{x} = -G\left(\frac{M_A}{d-x}+\frac{M_B}{x}\right); V_{5\ m} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\left(\frac{4000}{25-5}+\frac{9000}{5}\right) = -1{,}33\cdot 10^{-7}\ \text{J kg}^{-1}$$

La energía cinética será:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\Delta E_P \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = -\Delta V \Rightarrow v = \sqrt{-2\ \Delta V} = \sqrt{2\,(V_{15\,m}-V_{5\,m})} = \sqrt{2\,(-6{,}67\cdot 10^{-8}+1{,}33\cdot 10^{-7})} = 3{,}64\cdot 10^{-4}\ \text{m s}^{-1}$$

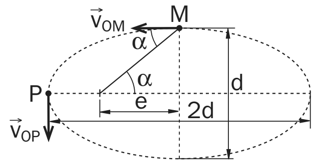
e) Dado que la fuerza que genera la masa M_A en M_B es igual a la que genera M_B en M_A, y lo mismo sucede para cada par de masas, por tanto, la suma de todas las fuerzas gravitatorias es cero.

4.65 La estrella *S* tiene, en una órbita elíptica de eje mayor igual a dos veces el eje menor, al planeta *P*. En el perigeo, la distancia de *P* a *S* es 1 UA y la velocidad es $v_{OP} = \sqrt{1,2}\ v_O$, en la que v_O es la velocidad orbital correspondiente a una órbita circular a esa distancia. Calcula:

a) La distancia a *S* en el apogeo.

b) La velocidad v_{OA} de *P* en el apogeo.

c) La velocidad v_{OM} de *P* en los puntos *M* en los que la trayectoria corta al eje menor de la órbita.



a) Dado que se trata de una órbita elíptica, la distancia entre la estrella y el apogeo se puede calcular como la distancia entre la estrella y el perigeo más la distancia entre los focos. Dado que el semieje mayor es el doble del semieje menor, se tiene que la órbita tiene una excentricidad:

$$e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{d^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{2^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{2^2}} = 0{,}866$$

Para la elipse se tiene que la distancia desde la estrella al perigeo es:

$$d_{PS} = a\,(1-e) \Rightarrow a = \frac{d_{PS}}{1-e} = \frac{1\ \text{UA}}{1-0{,}866} = 7{,}46\ \text{UA}$$

La distancia al apogeo sera:

$$d_{AS} = a\,(1+e) = 7{,}46\,(1+0{,}866) = 13{,}9\ \text{UA}$$

b) En el perigeo y apogeo se cumple la siguiente relación:

$$v_P \cdot d_{PS} = v_A \cdot d_{AS} \ \Rightarrow\ v_A = v_P\,\frac{d_{PS}}{d_{AS}} = \sqrt{1{,}2}\ v_O\,\frac{1}{13{,}9} = 0{,}0788\ v_O$$

c) En cualquier punto de la trayectoria, se tiene que la velocidad areolar es constante. Para poder emplear esta relación es necesario conocer la distancia desde la estrella hasta *M*.

Este valor se puede calcular haciendo uso de la semidistancia focal (*c*):

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$d_{SM} = \sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{a^2 - b^2 + b^2} = a = 7{,}46\ \text{UA}$$

La expresión que se determina a partir de la velocidad areolar es:

$$v_P \cdot d_{PS} = v_M \cdot d_{SM} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2+b^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2+b^2}} = \frac{\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$$

Despejando la velocidad en *M* y sustituyendo los diferentes resultados se tiene:

$$v_M = \frac{v_P \cdot d_{PS}}{d_{SM}\cdot\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1{,}2}\ v_O \cdot 1}{7{,}46 \cdot 0{,}866} = 0{,}17\ v_O$$