7 Fenómenos ondulatorios

EJERCICIOS PROPUESTOS

7.1 Las ecuaciones de dos ondas armónicas son: ξ_1 = 0,001 sen 2π (5t – 2x) y ξ_2 = 0,001 sen 2π (5t – 6x), donde las longitudes están en metros y los tiempos en segundos. Halla la función de onda resultante.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 0{,}001\,\text{sen}\,2\pi(5t-2x) + 0{,}001\,\text{sen}\,2\pi(5t-6x)$$

Haciendo uso de la expresión: $\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, se tiene:

$$\xi = 0{,}001\cdot 2\,\text{sen}\,\frac{2\pi(5t-2x)+2\pi(5t-6x)}{2}\cos\frac{2\pi(5t-2x)-2\pi(5t-6x)}{2}$$

$$\xi = 0{,}002\,\text{sen}\,2\pi(5t-4x)\cos 4\pi x$$

7.2 Dos ondas armónicas tienen idéntica función de onda. ¿Cuál sería la ecuación de onda resultante de la interferencia de ambas ondas armónicas? ¿Qué característica de la onda resultante es diferente de las características de cada onda individualmente considerada?

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0\,\text{sen}\,(\omega t - kx) + \xi_0\,\text{sen}\,(\omega t - kx) = 2\xi_0\,\text{sen}\,(\omega t - kx)$$

La onda resultante tendría amplitud doble a la de cada onda individualmente considerada.

7.3 Deduce la expresión del valor de la diferencia de fase entre dos ondas armónicas que tienen frecuencias iguales y que inciden en un mismo punto.

La diferencia de fase entre dos ondas armónicas que inciden en un mismo punto es:

$$\delta = (\omega_2 t - kx_2) - (\omega_1 t - kx_1) = (\omega_2 - \omega_1)t - k(x_2 - x_1)$$

Si las frecuencias son iguales $(\omega_1 = \omega_2)$: $\delta = k(x_1 - x_2)$

7.4 El punto *P* equidista de dos focos emisores de ondas armónicas de distinta frecuencia. Deduce el valor de la diferencia de fase entre ambas ondas en dicho punto.

La diferencia de fase entre dos ondas armónicas que inciden en un mismo punto es:

$$\delta = (\omega_2 t - kx_2) - (\omega_1 t - kx_1) = (\omega_2 - \omega_1)t - k(x_2 - x_1)$$

Si las distancias a los focos son iguales $(x_1 = x_2)$: $\delta = (\omega_2 - \omega_1)t$

7.5 Dos ondas armónicas que tienen la misma frecuencia y la misma velocidad de propagación inciden en un punto *P*. ¿Cuál es el valor máximo de la amplitud resultante en ese punto? ¿Y el mínimo?

La amplitud resultante viene expresada por: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}$

El valor máximo tiene lugar para $\cos\delta = 1$: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2$

Y el mínimo para $\cos\delta = -1$: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} = A_1 - A_2$

7.6 ¿Por qué se afirma que el término de interferencia no depende del tiempo?

El término de interferencia es $\delta = k(x_1 - x_2)$ que no depende del tiempo.

7.7 Calcula la frecuencia de batido en un punto en el que inciden dos ondas de la misma amplitud de frecuencias 14,2 kHz y 14,4 kHz respectivamente.

$\nu_1 = 14\ 200\ \text{Hz}; \quad \nu_2 = 14\ 400\ \text{Hz}$

La frecuencia de batido es: $\nu = \dfrac{\nu_2 - \nu_1}{2} = \dfrac{200}{2} = 100\ \text{Hz}$

7.8 ¿Puede obtenerse una onda de frecuencia modulada a partir de dos ondas de la misma frecuencia y de la misma amplitud? ¿Por qué?

No; la frecuencia de batido sería nula: $\nu = \dfrac{\nu_2 - \nu_1}{2} = \dfrac{\nu - \nu}{2} = 0$

7.9 En una cuerda de 1,2 m de longitud, fija por sus extremos, se propagan las ondas transversales con una velocidad de 96 m s^{-1}. Calcula su frecuencia fundamental y la frecuencia del segundo armónico.

Frecuencia fundamental: $\nu = \dfrac{v}{2L} = \dfrac{96}{2 \cdot 1{,}2} = 40\ \text{Hz}$

La frecuencia del segundo armónico es: $\nu_2 = 2\nu_1 = 2 \cdot 40 = 80\ \text{Hz}$

7.10 Un tubo de órgano de 60 cm de longitud está abierto por un extremo. Calcula la frecuencia fundamental y los dos siguientes armónicos de las ondas sonoras estacionarias en el tubo. (Velocidad del sonido: 340 m s^{-1}.)

Frecuencia fundamental: $\nu = \dfrac{v}{4L} = \dfrac{340}{4 \cdot 0{,}60} = 140\ \text{Hz}$

La frecuencia del segundo armónico es: $\nu_2 = 3\nu_1 = 3 \cdot \dfrac{340}{2{,}40} = 430\ \text{Hz}$

Y la del tercero: $\nu_3 = 5\nu_1 = 5 \cdot \dfrac{340}{2{,}40} = 710\ \text{Hz}$

7.11 Busca información sobre la vida y la obra de Huygens en internet:

www.e-sm.net/f2bach71

Después, resume las principales aportaciones de Huygens a la óptica.

Las principales aportaciones fueron: construcción de lentes de grandes longitudes focales, invención del ocular acromático para telescopios, elaboración de la teoría ondulatoria de la luz, explicación a partir de su teoría de fenómenos ondulatorios como la reflexión, la refracción y la doble refracción.

7.12 Calcula qué tamaño debe tener un obstáculo para que pueda observarse el fenómeno de la difracción con ondas sonoras de 10 kHz de frecuencia. (Velocidad del sonido en el aire: 340 m s^{-1}.)

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{10 \cdot 10^3} = 0{,}034\ \text{m} = 3{,}4\ \text{cm}$$

7.13 Pon un ejemplo de movimiento ondulatorio que pase de un medio a otro con un ángulo de incidencia de 0º. En este caso, ¿cuál es el valor del ángulo de refracción?

El caso de la luz que incide perpendicularmente sobre un vidrio o el sonido cuando incide desde el aire hasta el agua.

$$\text{sen}\,\hat{i} = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\hat{r} = 0$$

El movimiento ondulatorio cambia de medio sin desviarse.

7.14 Calcula el ángulo de refracción con que emerge una onda sonora que pasa del aire al agua con un ángulo de incidencia de 10º.

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{v_1} = \frac{\text{sen}\,\hat{r}}{v_2} \Rightarrow \frac{\text{sen}10^\circ}{340} = \frac{\text{sen}\,\hat{r}}{1500} \Rightarrow \hat{r} = 50^\circ$$

7.15 Calcula qué frecuencia mide un observador estacionario que oye el sonido de 300 Hz emitido por una locomotora que se acerca hacia él a una velocidad de 120 km h^{-1}.

$$v = 120\ \text{km h}^{-1} = 33{,}3\ \text{m s}^{-1}$$

Para un foco emisor que se acerca a un observador fijo:

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{v_F}{v}\right) = 300\left(1 + \frac{33{,}3}{340}\right) = 329\ \text{Hz}$$

7.16 Dos automóviles, ambos a 100 km h^{-1}, se mueven en la misma dirección alejándose el uno del otro. Si la bocina de uno de ellos emite un sonido de 400 Hz, ¿qué frecuencia percibe el conductor del otro automóvil?

$$v = 100\ \text{km h}^{-1} = 27{,}8\ \text{m s}^{-1}$$

Para un foco emisor que se aleja de un observador en movimiento:

$$\nu' = \nu\,\frac{v - v_O}{v + v_F} = 400\,\frac{340 - 27{,}8}{340 + 27{,}8} = 340\ \text{Hz}$$

7.17 El contador electrónico de un radar mide un intervalo de 30 μs entre la emisión de la señal y la recepción de su eco. Calcula a qué distancia se encuentra el objeto en el que se ha reflejado.

Entre la emisión y la recepción, la onda recorre dos veces la distancia entre el radar y el objeto a la velocidad de la luz:

$$2d = c \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^8 \cdot 30 \cdot 10^{-6} = 9000\ \text{m} \Rightarrow d = 4500\ \text{m} = 4{,}5\ \text{km}$$

7.18 Señala cuáles son las principales semejanzas y diferencias entre:

a) Una ecografía y una radiografía.

b) Un radar y un sónar.

a) La ecografía y la radiografía utilizan las ondas para obtener imágenes de los cuerpos. La ecografía utiliza ultrasonidos de baja intensidad que no dañan el organismo; la radiografía utiliza rayos X, que son muy energéticos y pueden dañar los tejidos.

b) El radar y el sonar utilizan ondas para medir distancias aprovechando el eco en los fenómenos de reflexión ondulatoria. El radar utiliza ondas electromagnéticas; el sonar, ultrasonidos. El radar es más eficaz en el aire, mientras que el sonar lo es en el agua.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

INTERFERENCIA DE ONDAS

7.19 Las ecuaciones correspondientes a dos ondas armónicas son:

$$\boldsymbol{\xi_1 = 0{,}03\ \text{sen}\,(8\pi t - 5\pi x); \quad \xi_2 = 0{,}02\ \text{sen}\,(8\pi t - 5\pi x)}$$

donde las longitudes están expresadas en metros y los tiempos, en segundos. Ambas ecuaciones coinciden en un punto del espacio. Halla para la onda resultante:

a) La función de onda.

b) La amplitud.

c) El período y la frecuencia.

d) La longitud de onda y el número de onda.

a) $\xi = \xi_1 + \xi_2 = 0{,}03\ \text{sen}\ (8\pi t - 5\pi x) + 0{,}02\ \text{sen}\ (8\pi t - 5\pi x) = 0{,}05\ \text{sen}\ (8\pi t - 5\pi x)$

b) Comparando con $\xi = A\ \text{sen}\ (\omega t - kx)$ se tiene: A = 0,05 m

c) $\omega = 2\pi\nu \Rightarrow 8\pi = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = 4\,\text{Hz}$; $T = \nu^{-1} = 0{,}25\,\text{s}$

d) $k = 5\pi\,\text{m}^{-1} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{5\pi} = 0{,}4\,\text{m}$

7.20 Las ecuaciones correspondientes a dos ondas armónicas son:

$$\boldsymbol{y_1 = 0{,}05\ \text{sen}\,2\pi(4t - x); \quad y_2 = 0{,}05\ \text{sen}\,2\pi(4t - 5x)}$$

Calcula la amplitud de la onda resultante en el punto x = 1 m.

a) La ecuación suma es: $y = y_1 + y_2 = 0{,}05\ \text{sen}\ 2\pi(4t - x) + 0{,}05\ \text{sen}\ 2\pi(4t - 5x)$

Haciendo uso de la expresión: $\text{sen}\ \alpha + \text{sen}\ \beta = 2\ \text{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, se tiene:

$$y = 0{,}05 \cdot 2\ \text{sen}\frac{2\pi(4t - x) + 2\pi(4t - 5x)}{2}\cos\frac{2\pi(4t - x) - 2\pi(4t - 5x)}{2}$$

$$y = 0{,}1\,\text{sen}\ 2\pi(4t - 3x)\cos 4\pi x$$

b) Para x = 1 m: $y = 0{,}1\,\text{sen}\ 2\pi(4t - 3\cdot 1)\cos 4\pi\cdot 1 = 0{,}1\,\text{sen}\ 2\pi\ (4t - 3)\cos 4\pi = 0{,}1\,\text{sen}\ 2\pi(4t - 3)$

La amplitud en este punto es A = 0,1 m.

7.21 Las ecuaciones correspondientes a dos ondas armónicas son:

$$\boldsymbol{\xi_1 = 0{,}03\ \text{sen}\,2\pi(3t - 3x); \quad \xi_2 = 0{,}03\ \text{sen}\,2\pi(3t - 11x)}$$

donde las longitudes están expresadas en metros y los tiempos, en segundos. Halla:

a) La función de onda resultante.

b) El valor de esta función en el punto x = 1 m.

a) $\xi = \xi_1 + \xi_2 = 0{,}03\ \text{sen}\ 2\pi(3t - 3x) + 0{,}03\ \text{sen}\ 2\pi(3t - 11x)$

Haciendo uso de la expresión: $\text{sen}\ \alpha + \text{sen}\ \beta = 2\ \text{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, se tiene:

$$\xi = 0{,}03 \cdot 2\ \text{sen}\frac{2\pi(3t - 3x) + 2\pi(3t - 11x)}{2}\cos\frac{2\pi(3t - 3x) - 2\pi(3t - 11x)}{2} = 0{,}06\ \text{sen}\ 2\pi(3t - 7x)\cos 8\pi x$$

b) Para x = 1 m: $\xi = 0{,}06\ \text{sen}\ 2\pi(3t - 7\cdot 1)\cos 8\pi\cdot 1 = 0{,}06\ \text{sen}\ 2\pi(3t - 7)\cos 8\pi = 0{,}06\ \text{sen}\ 2\pi(3t - 7)$

7.22 Dos altavoces coherentes emiten ondas sonoras de 100 Hz de frecuencia y 2 · 10^{-7} m de amplitud. Calcula la amplitud de la onda resultante en un punto *P* que dista 6,0 m del primero y 9,4 m del segundo.

La amplitud resultante viene expresada por: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}$

El valor de δ es $\delta = k(x_1 - x_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2)$ Longitud de onda: $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{100} = 3{,}4\,\text{m}$

$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2) = \frac{2\pi}{3{,}4}(9{,}4 - 6{,}0) = 2\pi \Rightarrow \cos\delta = 1$

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2 = 2\cdot 10^{-7} + 2\cdot 10^{-7} = 4\cdot 10^{-7}\,\text{m}$

7.23 En un punto coinciden dos ondas armónicas de ecuaciones:

$$\mathbf{y_1 = 0{,}01\,sen\,2\pi(2t - 0{,}4); \quad y_2 = 0{,}02\,sen\,2\pi(2t - 0{,}2)}$$

donde las longitudes están en metros y los tiempos, en segundos. Determina la amplitud de la onda resultante en dicho punto.

La amplitud resultante viene expresada por: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}$

El valor de δ es $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi(2t - 0{,}2) - 2\pi(2t - 0{,}4) = 0{,}4\pi$

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta} = \sqrt{0{,}01^2 + 0{,}02^2 + 2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}02\cos 0{,}4\pi} = 0{,}025\,\text{m}$

7.24 En un punto (x = 20 cm) coinciden dos ondas armónicas de ecuaciones:

$$\mathbf{y_1 = 3sen\,(2\pi t - 6\pi x); \quad y_2 = 4sen\,(3\pi t - 5\pi x)}$$

donde las longitudes están en centímetros y los tiempos, en segundos. Calcula la amplitud de la onda resultante en ese punto en el instante t = 2 s.

El valor de δ es $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (3\pi t - 5\pi x) - (2\pi t - 6\pi x) = \pi t + \pi x$

Para x = 20 cm y t = 2 s, $\delta = \pi t + \pi x = \pi\cdot 2 + \pi\cdot 20 = 22\pi \Rightarrow \cos\delta = \cos 22\pi = 1$

Por tanto, la amplitud resultante es: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2 = 3 + 4 = 7\,\text{cm}$

7.25 Dos altavoces iguales de 2,4 mW de potencia cada uno emiten en fase con una frecuencia de 500 Hz. Un observador se encuentra a 4 m del primero y 6 m del segundo. Calcula la intensidad sonora que percibe el observador si:

a) Solo funciona el primer altavoz.

b) Solo funciona el segundo.

c) Funcionan ambos simultáneamente.

a) A una distancia de 4 m la intensidad de la onda sonora es: $I_4 = \frac{P}{4\pi r_4^2} = \frac{2{,}4\cdot 10^{-3}}{4\pi\cdot 4^2} = 1{,}2\cdot 10^{-5}\ \text{W m}^{-2}$

El nivel de intensidad sonora correspondiente es: $\beta_{dB} = 10\log\frac{1{,}2\cdot 10^{-5}}{10^{-12}} = 71\,\text{dB}$

b) A una distancia de 6 m la intensidad de la onda sonora es: $I_6 = \frac{P}{4\pi r_6^2} = \frac{2{,}4\cdot 10^{-3}}{4\pi\cdot 6^2} = 5{,}3\cdot 10^{-6}\ \text{W m}^{-2}$

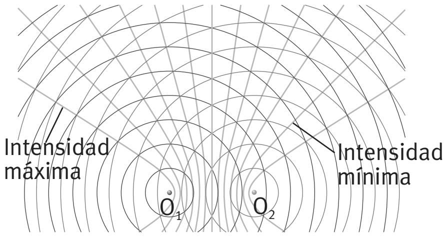
El nivel de intensidad sonora correspondiente es: $\beta_{dB} = 10\log\frac{5{,}3\cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 67\text{dB}$

c) Si funcionan ambos simultáneamente, la intensidad resultante es $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta$, siendo $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{0{,}68}\cdot(6 - 4) = 18{,}5\,\text{rad}$, ya que $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{500} = 0{,}68$.

$I = 1{,}2\cdot 10^{-5} + 5{,}3\cdot 10^{-6} + 2\sqrt{1{,}2\cdot 10^{-5}\cdot 5{,}3\cdot 10^{-6}}\cos 18{,}5 = 3{,}2\cdot 10^{-5}\,\text{W m}^{-2}$

En este caso el nivel de intensidad sonora es: $\beta_{dB} = 10\log\frac{3{,}2\cdot 10^{-5}}{10^{-12}} = 75\ \text{dB}$

7.26 ***Diagrama de interferencia.*** **Como se observa en el dibujo, las figuras de interferencias de dos ondas armónicas forman haces de hipérbolas.**



Teniendo en cuenta la definición de hipérbola y las condiciones de interferencia de máximos y mínimos en el espacio, justifica la formación de este diagrama de interferencia.

Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante. Esta condición se da para los puntos que cumplen la condición de máximo o mínimo de interferencia respecto a dos focos emisores:

Máximos de interferencia: $x_2 - x_1 = n\lambda$. Para cada valor de *n* se tiene una hipérbola.

Mínimos de interferencia: para cada valor de *n* se tiene una hipérbola con: $(x_1 - x_2) = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$

7.27 **Cuando vibran simultáneamente dos diapasones la frecuencia de las pulsaciones es 3 Hz. La frecuencia de uno de los diapasones es 600 Hz. Calcula la frecuencia de vibración del otro.**

$$\nu = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} = \frac{\Delta\nu}{2} \Rightarrow \Delta\nu = 2 \cdot 3 = 6\,\text{Hz}$$

Por tanto, la frecuencia del segundo diapasón puede ser 594 Hz ó 606 Hz.

7.28 **Calcula la frecuencia de batido en un punto del espacio en el que coinciden dos movimientos ondulatorios descritos por las siguientes ecuaciones:**

$$\mathbf{y_1 = 0{,}3\ sen\,(250\pi t - 5\pi x);\quad y_2 = 0{,}3\ sen\,(254\pi t - 5\pi x)}$$

Las frecuencias de cada movimiento son: $\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{250\pi}{2\pi} = 125\,\text{Hz}$ $\quad \nu_2 = \frac{254\pi}{2\pi} = 127\,\text{Hz}$

Por tanto, la frecuencia de batido es: $\nu = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} = \frac{127 - 125}{2} = 1\ \text{Hz}$

ONDAS ESTACIONARIAS

7.29 **Por una cuerda tensa se transmiten simultáneamente dos ondas transversales cuyas ecuaciones, utilizando el Sistema Internacional, son:**

$$\mathbf{y_1 = 0{,}04\ sen\,(10x - 600t);\quad y_2 = 0{,}04\ sen\,(10x + 600t)}$$

a) Calcula la ecuación de la onda estacionaria resultante.

b) La frecuencia fundamental del sonido que oirías si estuvieses cerca de la cuerda.

a) $y = y_1 + y_2 = 0{,}04\ \text{sen}\ (10x - 600t) + 0{,}04\ \text{sen}\ (10x + 600t) = 0{,}08\ \text{sen}\ 10x\ \cos 600t$

b) La longitud de onda es: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10} = 0{,}2\pi\ \text{m}$

La frecuencia correspondiente es: $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{0{,}2\pi} = 1{,}59\ v\ \text{Hz}$

Siendo v la velocidad de propagación de las ondas en esa cuerda.

7.30 La función de onda y(x, t) para una cierta onda estacionaria sobre una cuerda fija por ambos extremos es:

$$\mathbf{y(x, t) = 0{,}30\,sen\,0{,}20x\ \ cos\,500t}$$

con *x* e *y* en centímetros y *t* en segundos.

a) ¿Cuáles son las frecuencias de las ondas transversales en la cuerda que ha originado la onda estacionaria?

b) ¿Cuál es la velocidad de propagación de estas ondas?

c) Si la cuerda está vibrando en su frecuencia fundamental, ¿cuál es su longitud?

a) La frecuencias correspondiente es: $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{500}{2\pi} = 80\,\text{Hz}$

b) La longitud de onda es: $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi\ \text{m}$

$$v = \lambda\nu = 10\pi\frac{500}{2\pi} = 2500\ \text{cm s}^{-1} = 25\ \text{m s}^{-1}$$

c) Teniendo en cuenta la relación entre la frecuencia fundamental y la longitud:

$$\nu = \frac{v}{2L} \Rightarrow 80 = \frac{2500}{2L} \Rightarrow L = 15{,}6\,\text{cm}$$

7.31 Calcula la velocidad de propagación de las ondas transversales en una cuerda de piano de 16 cm de longitud cuya frecuencia fundamental de vibración es de 62,5 Hz.

Para la frecuencia fundamental, la longitud de la cuerda es igual a media longitud de onda:

$$L = \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow \lambda = 2L = 2\cdot 0{,}16 = 0{,}32\,\text{m}$$

Velocidad de propagación: $v = \lambda\nu = 0{,}32\cdot 62{,}5 = 20\ \text{m s}^{-1}$

7.32 En una cuerda de guitarra de 90 centímetros de longitud se genera una onda armónica.

a) Explica por qué tal onda debe ser estacionaria y no de propagación.

b) La distancia entre dos nodos es de 30 cm. ¿Dónde están situados los nodos? ¿Qué armónico está presente?

c) ¿Cuánto vale la longitud de onda? ¿Puede determinarse sin más la frecuencia de la onda? Obtén tal frecuencia en caso de ser posible.

a) El movimiento ondulatorio está confinado entre unos límites y se genera una onda estacionaria.

b) Como en los límites hay nodos, las posiciones de los nodos contando desde un extremo de la cuerda son: {0 cm, 30 cm, 60 cm, 90 cm}.

En este caso, la longitud de la cuerda abarca tres medias longitudes de onda: $L = \dfrac{3}{2}\lambda$

Se trata por tanto del tercer armónico, ya que $\lambda = \dfrac{2L}{n} \Rightarrow L = \dfrac{n}{2}\lambda$

c) $\lambda = \dfrac{2L}{n} = \dfrac{2\cdot 0{,}90}{3} = 0{,}60\ \text{m}$

No puede determinarse la frecuencia de la onda porque se desconoce la velocidad de propagación de las ondas en esa cuerda.

7.33 Se superponen en una cuerda dos ondas moviéndose en sentidos opuestos cuyas funciones de onda son:

$$\mathbf{y_1 = 0{,}05\ sen\ (2{,}0\ m^{-1}\ x - 3{,}0\ s^{-1}\ t)}$$

$$\mathbf{y_2 = 0{,}05\ sen\ (2{,}0\ m^{-1}\ x + 3{,}0\ s^{-1}\ t)}$$

obteniéndose ondas estacionarias.

a) Determina la amplitud de la oscilación de la partícula situada en x = 4,2 m, así como su velocidad transversal cuando t = 2,9 s.

b) ¿Con qué velocidad se mueven las ondas 1 y 2? ¿Cuáles son su período y su longitud de onda?

a) $y = y_1 + y_2 = 0{,}05\ \text{sen}\ (2{,}0x - 3{,}0t) + 0{,}05\ \text{sen}\ (2{,}0x + 3{,}0t)$

Haciendo uso de la expresión: $\text{sen}\ \alpha + \text{sen}\ \beta = 2\ \text{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, se tiene:

$$y = 0{,}05 \cdot 2\ \text{sen}\frac{(2{,}0x - 3{,}0t) + (2{,}0x + 3{,}0t)}{2}\cos\frac{(2{,}0x - 3{,}0t) - (2{,}0x + 3{,}0t)}{2}$$

$$y = 0{,}1\ \text{sen}\ 2{,}0x\cos 3{,}0t$$

Para x = 4,2 m, la amplitud es: $A = 0{,}1\ \text{sen}\ 2{,}0x = 0{,}1\ \text{sen}\ (2{,}0 \cdot 4{,}2) = 0{,}085\ \text{m}$

El movimiento de ese punto está descrito por $y = 0{,}085\cos 3{,}0t$

Su velocidad transversal para t = 2,9 s es: $v = \frac{dy}{dt} = -0{,}255\text{sen}3{,}0t = -0{,}255\text{sen}(3{,}0 \cdot 2{,}9) = -0{,}17\ \text{m s}^{-1}$

b) Longitud de onda: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2{,}0} = \pi = 3{,}14\ \text{m}$

Frecuencia: $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3{,}0}{2\pi} \Rightarrow$ Período: $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{3{,}0} = 2{,}1\ \text{s}$

Velocidad de propagación: $v = \lambda\nu = \pi\frac{3{,}0}{2\pi} = 1{,}5\ \text{m s}^{-1}$

7.34 Una cuerda fija por sus dos extremos vibra según la ecuación:

$$\mathbf{y = 1{,}2\ sen\ \pi x\cos 20\pi t}$$

estando *x* e *y* expresadas en centímetros y *t*, en segundos. Calcula:

a) La amplitud y la frecuencia de las ondas que han generado la onda estacionaria descrita.

b) La distancia entre dos nodos consecutivos.

c) La elongación del punto x = 2,5 cm en el instante t = 0,3 s.

a) Las ondas que han generado esta onda estacionaria son:

$$y_1 = 0{,}6\ \text{sen}(\pi x - 20\pi t),\quad y_2 = 0{,}6\ \text{sen}\ (\pi x + 20\pi t)$$

Amplitud: A = 0,6 cm; frecuencia: $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\pi}{2\pi} = 10\ \text{Hz}$

b) Longitud de onda: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ \text{cm}$

La distancia entre dos nodos consecutivos es igual a media longitud de onda: d = 1 cm

c) Para x = 2,5 cm y t = 0,3 s:

$$y = 1{,}2\ \text{sen}\pi x\cos 20\pi t = 1{,}2\text{sen}2{,}5\pi\cos(20\pi \cdot 0{,}3) = 1{,}2\text{sen}2{,}5\pi\cos 6\pi = 1{,}2\ \text{cm}$$

7.35 Se aplica una tensión de 64 N a una cuerda de 2 m de longitud y 20 g de masa fija por sus dos extremos. Calcula:

a) La velocidad de propagación de las ondas transversales en la cuerda.

b) La frecuencia fundamental de vibración de la cuerda.

c) La tensión que habría que aplicar sobre ella para que su frecuencia fundamental se duplicara.

a) $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{m/L}} = \sqrt{\frac{64}{0{,}020/2}} = 80 \text{ m s}^{-1}$

b) $\nu = \frac{v}{2L} = \frac{80}{2 \cdot 2} = 20 \text{ Hz}$

c) $\nu' = 2\nu = 2 \cdot 20 = 40 \text{ Hz}$ Esta nueva frecuencia requiere una nueva velocidad de propagación:

$$\nu' = \frac{v'}{2L} \Rightarrow v' = 2L\nu' = 2 \cdot 2 \cdot 40 = 160 \text{ m s}^{-1}$$

Para alcanzar esta velocidad de propagación, se necesita un nuevo valor para la tensión de la cuerda:

$$v' = \sqrt{\frac{T'}{\mu}} \Rightarrow T' = \mu \cdot v'^2 = \frac{0{,}020}{2}160^2 = 256 \text{ N}$$

7.36 a) ¿Cuáles son los valores de la frecuencia fundamental y de los otros armónicos en el caso de las ondas estacionarias en un tubo de 1 m de longitud cerrado por ambos extremos?

b) ¿Cuáles son los valores de las longitudes de onda correspondientes a dichas frecuencias?

Justifica las respuestas.

a) $\nu_n = \frac{v}{2L} n = \frac{340}{2 \cdot 1} = 170 \text{ Hz}$

La frecuencia fundamental es 170 Hz y los siguientes armónicos 340 Hz, 510 Hz, etc.

b) $\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{2 \cdot 1}{n} = \frac{2}{n} \text{m}$

La longitud de onda del tono fundamental es 2 m y la de los siguientes armónicos 1m, 0,67 m, etc.

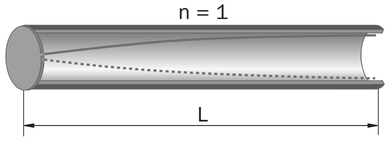
7.37 Calcula la longitud de un tubo de órgano cerrado por un extremo para que la frecuencia fundamental del sonido que emite sea 262 Hz. ¿Cuál es la frecuencia de cada uno de los dos siguientes armónicos?

$$\nu_1 = \frac{v}{4L} \Rightarrow L = \frac{v}{4\nu_1} = \frac{340}{4 \cdot 262} = 0{,}324 \text{ m} = 32{,}4 \text{ cm}$$

$$\nu_n = \frac{v}{4L}(2n-1) = (2n-1)\nu_1 \Rightarrow \nu_2 = (2 \cdot 2 - 1) \cdot \nu_1 = 3\nu_1 = 3 \cdot 262 = 786 \text{ Hz}$$

Análogamente: $\nu_3 = 5\nu_1 = 1310 \text{ Hz}$

7.38 Sea un tubo de un metro de longitud, abierto por un extremo y cerrado por el otro. Por el procedimiento adecuado se producen ondas estacionarias dentro del tubo y se oye un sonido de 84 Hz, que corresponde a la frecuencia fundamental.



a) Calcula la velocidad del sonido.

b) Determina la frecuencia del segundo armónico.

a) $\nu_1 = \frac{v}{4L} \Rightarrow v = 4L\nu_1 = 4 \cdot 1 \cdot 84 = 336 \text{ m s}^{-1}$

b) $\nu_n = \frac{v}{4L}(2n-1) = \nu_1(2n-1) \Rightarrow \nu_2 = 3\nu_1 = 3 \cdot 84 = 252 \text{ Hz}$

7.39 Imagina la siguiente experiencia: disponemos de un tubo de longitud L = 50 cm, que está cerrado por un extremo y abierto por el otro al aire, y un pequeño altavoz que emite sonido a una frecuencia que podemos modificar a voluntad. Situamos el altavoz frente al extremo abierto del tubo y, partiendo de una frecuencia muy baja, vamos aumentándola hasta que detectamos la primera resonancia para una frecuencia de 172 Hz.

a) Explica brevemente el fenómeno que estamos detectando.

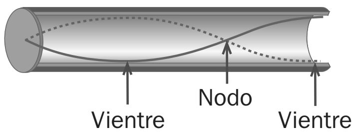
b) Deduce de los datos anteriores la velocidad del sonido en el aire.

c) Si seguimos aumentando la frecuencia del sonido emitido por el altavoz, ¿para qué frecuencia detectaremos la segunda resonancia? Representa gráficamente en este último caso la onda estacionaria que se forma dentro de tubo, indicando la posición de nodos y vientres.

a) La primera resonancia se produce al originarse una onda estacionaria en el tubo correspondiente a la frecuencia fundamental.

b) $\nu_1 = \frac{v}{4L} \Rightarrow v = 4L\nu_1 = 4 \cdot 0{,}50 \cdot 172 = 344 \text{ m s}^{-1}$

c) $\nu_n = \frac{v}{4L}(2n-1) = (2n-1)\nu_1 \Rightarrow \nu_2 = (2 \cdot 2 - 1) \cdot \nu_1 = 3\nu_1 = 3 \cdot 172 = 516 \text{ Hz}$



PRINCIPIO DE HUYGENS. DIFRACCIÓN

7.40 Calcula el tamaño aproximado que debe tener un obstáculo para que experimente el fenómeno de la difracción un sonido de:

a) 60 Hz **b) 500 Hz** **c) 2 kHz**

El tamaño aproximado que debe tener un obstáculo para que un sonido experimente el fenómeno de la difracción debe ser similar a su longitud de onda:

a) $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{60} = 5{,}67 \text{ m}$ b) $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{500} = 0{,}68 \text{ m}$ c) $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{2000} = 0{,}17 \text{ m}$

7.41 Calcula el tamaño aproximado que debe tener un obstáculo para que experimente el fenómeno de la difracción con los siguientes tipos de ondas electromagnéticas ($c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}):

a) Rayos X de 10^{18} Hz.

b) Luz visible de $5 \cdot 10^{14}$ Hz.

c) Microondas de 10^{10} Hz.

El tamaño aproximado que debe tener un obstáculo para que una onda electromagnética experimente el fenómeno de la difracción debe ser similar a su longitud de onda:

a) $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{18}} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 3 \text{ Å}$

b) $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{14}} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

c) $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{10}} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 3 \text{ cm}$

7.42 Un altavoz emite el sonido en todas las direcciones como un foco puntual si la longitud de onda es mucho mayor que el tamaño del altavoz. Calcula la frecuencia de los sonidos cuya longitud de onda es 100 veces mayor que el diámetro de un altavoz de 10 cm de diámetro.

Longitud de onda: $\lambda = 100 \cdot 0{,}10 = 10\,\text{m}$ Frecuencia: $\nu = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{340}{10} = 34\,\text{Hz}$

7.43 Un altavoz emite el sonido en línea recta hacia adelante si la longitud de onda es mucho menor que el tamaño del altavoz. Calcula la frecuencia de los sonidos cuya longitud de onda es 100 veces menor que el diámetro de un altavoz de 10 cm de diámetro.

Longitud de onda: $\lambda = \dfrac{0{,}10}{100} = 10^{-3}\,\text{m}$

Frecuencia: $\nu = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{340}{10^{-3}} = 340 \cdot 10^{3}\,\text{Hz} = 340\,\text{kHz}$

7.44 Argumenta si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

a) El principio de Huygens no es aplicable a las ondas mecánicas.

b) Los fenómenos de difracción son más fáciles de observar con la luz que con el sonido.

c) Los sonidos agudos se difractan con más facilidad que los graves.

a) No es correcta. El principio de Huygens es aplicable a las ondas mecánicas y a las electromagnéticas.

b) No es correcta. Los fenómenos de difracción son más fáciles de observar con el sonido que con la luz, porque la longitud de onda de la luz es mucho menor; solo se observan los fenómenos de difracción con la luz con obstáculos muy pequeños.

c) No es correcta. Los sonidos agudos se difractan con más dificultad que los graves porque tienen mayor frecuencia y, por tanto, menor longitud de onda.

7.45 Amplía la información sobre los fenómenos de difracción, reflexión y refracción de ondas en la siguiente dirección: www.e-sm.net/f2bach35

¿Cómo es posible oír la conversación de dos personas a la vuelta de una esquina o detrás de una tapia?

Por el fenómeno de la difracción, que permite a las ondas bordear los obstáculos.

EFECTO DOPPLER

7.46 La locomotora de un tren se acerca a una estación a 100 km h^{-1} cuando emite un sonido continuo de 380 Hz. Calcula qué frecuencia percibirá un observador en reposo en la estación.

Velocidad de la locomotora: $v = 100\ \text{km h}^{-1} = 27{,}8\ \text{m s}^{-1}$

Para un foco emisor que se acerca a un observador en reposo: $\nu' = \nu\left(1 + \dfrac{v_F}{v}\right) = 380\left(1 + \dfrac{27{,}8}{340}\right) = 411\ \text{Hz}$

7.47 Un camión, que circula a 90 km·h^{-1}, emite un sonido continuo de 275 Hz, en el momento que pasa por delante de un observador fijo. Calcula la frecuencia del sonido que percibe el observador cuando el camión:

a) Se aleja.

b) Se acerca.

a) $v = 90\ \text{km h}^{-1} = 25\ \text{m s}^{-1}$

Cuando el camión (emisor) se acerca al observador fijo: $\nu' = \nu\left(1 + \dfrac{v_F}{v}\right) = 275\left(1 + \dfrac{25}{340}\right) = 295\,\text{Hz}$

b) Cuando el camión se aleja del observador: $\nu' = \nu\left(1 - \dfrac{v_F}{v}\right) = 275\left(1 - \dfrac{25}{340}\right) = 255\,\text{Hz}$

7.48 Un diapasón que vibra con una frecuencia de 425 Hz se aleja con una velocidad de 1,7 m s^{-1} de un observador en reposo. Calcula la frecuencia que percibe el observador.

Aplicando la ecuación para un foco emisor que se aleja de un observador en reposo:

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v_F}{v}\right) = 425\left(1 - \frac{1{,}7}{340}\right) = 423\,\text{Hz}$$

7.49 Un automovilista, que se mueve con una velocidad de 90 km h^{-1}, se acerca a una fábrica mientras que la sirena de esta emite un sonido de 250 Hz. Calcula:

a) La frecuencia percibida por el automovilista.

b) La frecuencia que percibirá mientras se aleja después de sobrepasar la fábrica.

a) La velocidad del automovilista es: $v = 90\ \text{km h}^{-1} = 25\ \text{m s}^{-1}$

Cuando el observador en movimiento (automovilista) se acerca al foco fijo (fábrica):

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{v_0}{v}\right) = 250\left(1 + \frac{25}{340}\right) = 268\ \text{Hz}$$

b) Cuando el automovilista se aleja del foco emisor:

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v_0}{v}\right) = 250\left(1 - \frac{25}{340}\right) = 232\ \text{Hz}$$

7.50 Un radar para controlar la velocidad de los automóviles emite ondas electromagnéticas de 2 · 10^9 Hz. Tras reflejarse en un automóvil, las ondas interfieren con las originales, obteniéndose una pulsación de 300 Hz de frecuencia. Halla la velocidad del automóvil.

La frecuencia percibida por el automóvil que se aleja del foco a velocidad *v* es:

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v_0}{v}\right) = 2 \cdot 10^9\left(1 - \frac{v}{3 \cdot 10^8}\right)$$

Esta frecuencia se refleja hacia el radar como la emisión de un punto que se aleja del observador en reposo:

$$\nu'' = \nu'\left(1 - \frac{v_0}{v}\right) = 2 \cdot 10^9\left(1 - \frac{v}{3 \cdot 10^8}\right)\left(1 - \frac{v}{3 \cdot 10^8}\right) = 2 \cdot 10^9\left(1 - \frac{v}{3 \cdot 10^8}\right)^2$$

La onda emitida y el eco generan una pulsación de frecuencia: $\Delta\nu = \frac{\nu'' - \nu}{2} \Rightarrow 300 = \frac{\nu'' - \nu}{2} \Rightarrow \nu'' - \nu = 600\ \text{Hz}$

Por tanto: $2 \cdot 10^9\left(1 - \frac{v}{3 \cdot 10^8}\right)^2 - 2 \cdot 10^9 = 600\ \text{Hz} \Rightarrow 2 \cdot 10^9\left[\left(1 - \frac{2v}{3 \cdot 10^8}\right) - 1\right] = 600\ \text{Hz}$

En donde se ha despreciado por su valor comparativamente muy bajo el término $\left(\frac{v^2}{9 \cdot 10^{16}}\right)$

Con ello, resulta: $2 \cdot 10^9\,\frac{2v}{3 \cdot 10^8} = 600 \Rightarrow v = 45\,\text{m s}^{-1} \Rightarrow 162\,\text{km h}^{-1}$

7.51 Argumenta si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

a) El efecto Doppler es aplicable solo a las ondas sonoras.

b) El efecto Doppler es muy difícil de observar en la vida cotidiana.

c) Si el foco emisor está fijo, la frecuencia medida por el receptor es tanto mayor cuanto mayor sea su velocidad.

d) La frecuencia aparente que mide un observador es una característica de las ondas emitidas por el foco emisor.

a) No es correcta. El efecto Doppler es aplicable a todo tipo de ondas.

b) No es correcta. Es habitual percibir sus efectos en el ruido emitido por vehículos que se acercan o se alejan.

c) No es correcta. Depende de si el receptor se acerca o se aleja.

d) No es correcta. Depende del movimiento relativo entre ambos.

7.52 Un automóvil y un camión circulan por un tramo recto de carretera, ambos con una velocidad de 90 km h^{-1} pero en sentidos contrarios. Antes de cruzarse ambos vehículos, el conductor del camión hace sonar la bocina, que emite un sonido continuo de 240 Hz. Calcula la frecuencia percibida por el automovilista cuando el camión:

a) Se acerca.

b) Se aleja.

a) $v_F = v_O = 90 \text{ km h}^{-1} = 25 \text{ m s}^{-1}$

Para foco y observador en movimiento que se acercan: $\nu' = \nu \dfrac{v + v_O}{v - v_F} = 240 \cdot \dfrac{340 + 25}{340 - 25} = 278 \text{ Hz}$

b) Para foco y observador en movimiento que se alejan: $\nu' = \nu \dfrac{v - v_O}{v + v_F} = 240 \cdot \dfrac{340 - 25}{340 + 25} = 207 \text{ Hz}$

7.53 Amplía mediante internet tu información sobre el efecto Doppler: www.e-sm.net.f2bach36

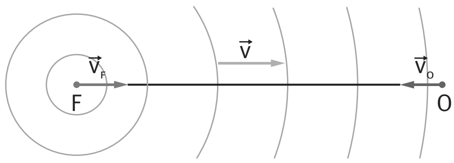
¿Qué frecuencia mide un receptor si el foco emisor de ondas sonoras y el receptor se mueven con la misma velocidad, en la misma dirección y con el mismo sentido?

La frecuencia del emisor.

7.54 a) Demuestra que si un observador, que se mueve con velocidad *v_O*, y un foco emisor, que se mueve con velocidad *v_F*, se acercan, la frecuencia medida por el observador es:

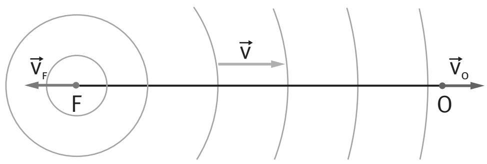
$$\nu' = \nu \frac{v + v_O}{v - v_F}$$

siendo ν la frecuencia de la onda emitida por el foco y *v* su velocidad.



b) Demuestra que si el observador y el foco se alejan, la frecuencia medida por el observador es:

$$\nu' = \nu \frac{v - v_O}{v + v_F}$$



a) Cuando el foco se acerca a un observador fijo, la frecuencia que llega al receptor es: $\nu' = \nu \left(\dfrac{v}{v - v_F} \right)$

Si esta es la frecuencia de la onda que llega a un observador y este se está moviendo hacia la fuente con una velocidad $v_O << v$, observará la siguiente frecuencia: $\nu'' = \nu' \left(1 + \dfrac{v_O}{v} \right)$

Incorporando la primera ecuación a esta segunda, se tiene:

$$\nu'' = \nu \left(\frac{v}{v - v_F} \right) \left(1 + \frac{v_O}{v} \right) = \nu \left(\frac{v}{v - v_F} \right) \left(\frac{v + v_O}{v} \right) \Rightarrow \nu'' = \nu \frac{v + v_0}{v - v_F}$$

b) Análogamente, si el foco se aleja del observador, la frecuencia que llega es: $\nu' = \nu \left(\dfrac{v}{v + v_F} \right)$

La frecuencia que percibirá el receptor será: $\nu'' = \nu' \left(1 - \dfrac{v_O}{v} \right)$

Combinando ambas, se tiene: $\nu'' = \nu \left(\dfrac{v}{v + v_F} \right) \left(1 - \dfrac{v_O}{v} \right) = \nu \left(\dfrac{v}{v - v_F} \right) \left(\dfrac{v - v_O}{v} \right) \Rightarrow \nu'' = \nu \dfrac{v - v_0}{v + v_F}$

PROBLEMA DE SÍNTESIS

7.55 La cuerda de una guitarra tiene una masa de 0,65 g y una distancia de 65 cm entre sus extremos fijos. Se afina para que su frecuencia fundamental sea 261,63 Hz, que corresponde a la nota *do* en la escala igual temperada que se utiliza por los fabricantes de instrumentos musicales.

a) ¿Cuál es la longitud de onda del modo fundamental de vibración de la cuerda?

b) ¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas transversales en la cuerda?

c) ¿Qué tensión debe aplicarse a la cuerda para que vibre al aire con la nota *do*?

El traste 12.º de las guitarras se sitúa de modo que produzca la misma nota que la cuerda al aire pero una octava más alta (frecuencia doble).

d) ¿Cuál es la frecuencia de la nota do producida al vibrar la cuerda presionando con el dedo en el traste 12.º? ¿Dónde debe situarse este traste?

e) ¿Dónde deben situarse los trastes 1.º y 2.º para obtener, al presionar en ellos, las siguientes notas de la escala: *do#* (277,19 Hz) y *re* (293,67 Hz)?

Se quiere afinar la cuerda para que su nota al aire (sin presionar ningún traste) sea *re*. En este caso:

f) ¿Cuál sería la velocidad de propagación de las ondas transversales en la cuerda?

g) ¿Qué tensión habría que aplicar a la cuerda para ello?

h) ¿Qué frecuencias produciría la cuerda situando los dedos en los trastes 1.º, 2.º y 12.º?

a) Para la frecuencia fundamental, la longitud de la cuerda es igual a media longitud de onda:

$$L = \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow \lambda = 2L = 2 \cdot 0{,}65 = 1{,}3\,\text{m}$$

b) $v = \lambda\nu = 1{,}3 \cdot 261{,}63 = 340\ \text{m s}^{-1}$

c) Densidad lineal de masa: $\mu = \frac{m}{L} = \frac{0{,}65 \cdot 10^{-3}}{0{,}65} = 10^{-3}\text{kg m}^{-1}$; $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \mu \cdot v^2 = 10^{-3} \cdot 340^2 = 115{,}6\,\text{N}$

d) $\nu_2 = 2\nu_1 = 2 \cdot 261{,}63 = 523{,}26\,\text{Hz}$; la longitud de onda correspondiente es: $\lambda_2 = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{523{,}26} = 0{,}65\ \text{m}$

La longitud de cuerda que queda libre equivale a media longitud de onda. Deben quedar 32,5 cm de cuerda libre y el traste 12.º se debe situar a 32,5 cm (65 cm – 32,5 cm) del punto de anclaje de la cuerda.

e) Análogamente, para frecuencias de 277,19 Hz y 293,67 Hz, resulta: $d_{do\#} = 3{,}67\,\text{cm}; d_{re} = 7{,}11\text{cm}$

f) En este caso: $v' = \lambda\nu' = 1{,}3 \cdot 293{,}67 = 382\ \text{m s}^{-1}$

g) $v' = \sqrt{\frac{T'}{\mu}} \Rightarrow T' = \mu \cdot v'^2 = 10^{-3} \cdot 382^2 = 146\ \text{N}$

h) Con esta tensión de cuerda, en el traste 1.º, desde donde quedan 61,33 cm de cuerda libre (65 – 3,67), la longitud de onda fundamental es $\lambda_1 = 2L_1 = 2 \cdot 61{,}33 = 122{,}66\,\text{cm}$; y su frecuencia es:

$$\nu_1 = \frac{v'}{\lambda_1} = \frac{382}{1{,}227} = 311{,}3\ \text{Hz}$$

Del mismo modo, resulta en el traste 2.º una frecuencia de 329,94 Hz y en el traste 12.º de 587,69 Hz.