EJERCICIOS RESUELTOS: DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y NORMAL

Función de probabilidad

4 Una variable aleatoria X toma los valores 2, 4, 5, 7, 8, 9 con probabilidades 0,1; 0,2; 0,25; 0,15; 0,12; k, respectivamente.

a) Halla k para que sea una función de probabilidad.

b) Para el valor de k hallado en el apartado anterior, halla $P(X < 6)$ y $P(4 < X \leqslant 9)$.

a) Para que sea una función de probabilidad, tiene que ocurrir que todas las probabilidades sean mayores e iguales que cero y que su suma sea igual a 1.

Como todas las probabilidades son positivas, lo único que tienen que verificar es que sumen 1:

$0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}12 + k = 1 \Rightarrow k = 0{,}18$

b) $P(X < 6) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}55$

$P(4 < X \leqslant 9) = P(X = 5) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) =$

$= 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}12 + 0{,}18 = 0{,}7$

Función de densidad

5 Sea X una variable cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -3 \\ \dfrac{1}{2k}, & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0, & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

a) Halla el valor de k para que sea una verdadera función de densidad.

b) Representa la función $f(x)$.

c) Halla las siguientes probabilidades:

$P(X \leqslant -1)$

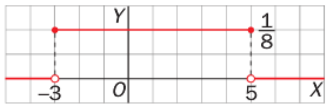
$P(0 \leqslant X \leqslant 4)$

$P(X \geqslant 2)$

a) La función $f(x)$ es siempre positiva o nula. Para que $f(x)$ sea una verdadera función de densidad, el área del recinto interior tiene que ser igual a 1. Como el recinto es un rectángulo de base 8 y de altura $\dfrac{1}{2k}$, entonces $8\,\dfrac{1}{2k} = 1 \Rightarrow k = 4$

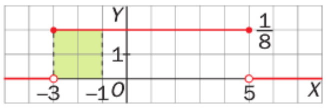
b) Hay que representar la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < -3 \\ \dfrac{1}{8}, \text{ si } -3 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0, \text{ si } x > 5 \end{cases}$$



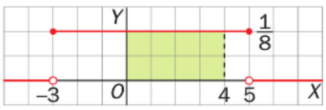
c) $P(X \leqslant -1)$ es el área del recinto coloreado:

$$P(X \leqslant -1) = 2 \cdot \frac{1}{8} = 0{,}25$$



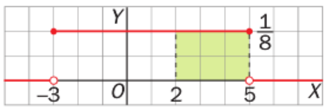
$P(0 \leqslant X \leqslant 4)$ es el área del recinto coloreado:

$$P(0 \leqslant X \leqslant 4) = 4 \cdot \frac{1}{8} = 0{,}5$$



$P(X \geqslant 2)$ es el área del recinto coloreado:

$$P(X \geqslant 2) = 3 \cdot \frac{1}{8} = 0{,}375$$



Distribución binomial

6 PAU En una ciudad se han elegido al azar 2000 habitantes. ¿Cuál es la probabilidad de que 11 de ellos hayan nacido el 27 de enero?

Se considera la variable aleatoria X, que expresa el número de personas nacidas el 27 de enero. Se trata de una distribución binomial $B\left(2\,000, \dfrac{1}{365}\right)$. Por tanto:

$$P(X = 11) = \binom{2\,000}{11}\left(\frac{1}{365}\right)^{11}\left(\frac{364}{365}\right)^{1989} = 0{,}0139$$

Distribución normal

7 PAU Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 4 y varianza 9.

a) Calcula $P(3{,}4 \leqslant X \leqslant 4{,}6)$.

b) Encuentra un valor $a > 0$ tal que:

$P(4 - 6a \leqslant X \leqslant 4 + 6a) = 0{,}75$

a) $P(3{,}4 \leqslant X \leqslant 4{,}6) = P\left(\dfrac{3{,}4 - 4}{3} \leqslant Z \leqslant \dfrac{4{,}6 - 4}{3}\right) = P(-0{,}2 \leqslant Z \leqslant 0{,}2) =$

$= P(Z \leqslant 0{,}2) - P(Z \leqslant -0{,}2) = 0{,}5793 - (1 - 0{,}5793) = 0{,}1586$

b) $P(4 - 6a \leqslant X \leqslant 4 + 6a) = P\left(\dfrac{-6a}{3}\right) \leqslant Z \leqslant \left(\dfrac{6a}{3}\right) = P(-2a \leqslant Z \leqslant 2a) =$

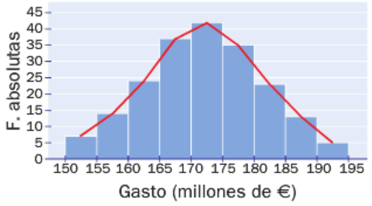
$= P(Z \leqslant 2a) - P(Z \leqslant -2a) = P(Z \leqslant 2a) - [1 - P(Z \leqslant 2a)] = 2\,P(Z \leqslant 2a) - 1 = 0{,}75$

$P(Z \leqslant 2a) = 0{,}875 \Rightarrow 2a = 1{,}15 \Rightarrow a = 0{,}575$

8 PAU Una encuesta sobre los gastos que 200 países harán durante el próximo quinquenio para proteger la capa de ozono ha dado los resultados de la tabla adjunta. Halla la media aritmética y la desviación típica y ajústala mediante una distribución normal que tenga por media aritmética y desviación típica las de la primera. ¿Cuál es el porcentaje teórico de gastos comprendido entre 152,5 y 167,5? Compara este porcentaje experimental deducido de la encuesta con el deducido suponiendo un reparto lineal dentro de las clases.

Gastos (millones de dólares)	x_i	f_i
[150, 155)	152,5	7
[155, 160)	157,5	14
[160, 165)	162,5	24
[165, 170)	167,5	37
[170, 175)	172,5	42
[175, 180)	177,5	35
[180, 185)	182,5	23
[185, 190)	187,5	13
[190, 195)	192,5	5

En primer lugar se dibuja el histograma:



Como el histograma de frecuencias se ajusta a una distribución normal, la distribución empírica puede ajustarse a una normal.

Se construye la siguiente tabla para calcular la media y la desviación típica:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
152,5	7	1067,5	162 792,75
157,5	14	2205	347 287,5
162,5	24	3900	633 750
167,5	37	6197,5	1 038 081,25
172,5	42	7245	1 249 762,5
177,5	35	6212,5	1 102 718,75
182,5	23	4197,5	766 043,75
187,5	13	2437,5	457 031,25
192,5	5	962,5	185 281,25
	200	34 425	5 942 750

- Media aritmética: $\overline{x} = \dfrac{34\,425}{200} = 172{,}125$ millones de dólares
- Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\dfrac{5\,942\,750}{200} - 172{,}125} = 9{,}31$millones de dólares

Por tanto, se puede aproximar esta distribución experimental mediante la distribución teórica $N(172{,}125;\ 9{,}31)$.

Sea X la variable aleatoria que expresa los gastos en millones de dólares. Entonces:

$$P(152{,}5 \leqslant X \leqslant 167{,}5) = P\left(\frac{152{,}5 - 172{,}125}{9{,}31} \leqslant Z \leqslant \frac{167{,}5 - 172{,}125}{9{,}31}\right) =$$

$$= P(-2{,}1 \leqslant Z \leqslant -0{,}50) = P(0{,}5 \leqslant Z \leqslant 2{,}1) = P(Z \leqslant 2{,}1) - P(Z \leqslant 0{,}5) =$$

$$= 0{,}9821 - 0{,}6915 = 0{,}2906$$

Por tanto, en la distribución teórica se tiene que el 29% del gasto se encuentra en el intervalo (152,5; 167,5).

En la distribución experimental se tiene:

$\dfrac{7}{2} + 14 + 24 + \dfrac{37}{2} = 60$, luego hay 60 de 200 en dicho intervalo, lo que equivale al 30%.

Por tanto, los resultados teóricos se acercan mucho a los resultados experimentales.

Aproximación de la binomial por la normal

9 PAU Tenemos un bombo de lotería con 10 bolas idénticas numeradas del 1 al 10.

a) Hacemos seis extracciones consecutivas de una bola que se devuelve al bombo después de cada extracción. Calcula la probabilidad de que el número 4 salga, como máximo, una vez en estas extracciones.

b) Si hacemos 150 extracciones como en el apartado anterior, ¿cuál es la probabilidad de que el número 5 salga como máximo 16 veces?

a) Si X es una variable aleatoria que expresa el número de veces que sale 4, esta variable sigue una binomial $B(6;\ 0{,}1)$.

$$P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^9 = 0{,}7361$$

b) Si X es una variable aleatoria que expresa el número de veces que sale 4, esta variable sigue una binomial $B(150;\ 0{,}1)$.

Como $n = 150$, $np = 150 \cdot 0{,}1 = 15 > 5$ y $nq = 150 \cdot 0{,}9 = 135 > 5$, la distribución se puede aproximar mediante una distribución normal de parámetros:

$\mu = np = 150 \cdot 0{,}1 = 15$ $\qquad \sigma = \sqrt{150 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3{,}67$

La probabilidad pedida es:

$$P(X \leqslant 16) = P(X' < 16{,}5) = P\left(Z < \frac{16{,}5 - 15}{1{,}67}\right) = P(Z < 0{,}41) = 0{,}6591$$