EJERCICIOS RESUELTOS: EL MUESTREO ESTADÍSTICO

Tipos de muestreo

7 PAU En una cadena de centros comerciales trabajan 150 personas en el departamento de personal, 450 en el de ventas, 200 en el de contabilidad y 100 en el de atención al cliente. Con objeto de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores.

a) ¿Qué tipo de muestreo se debe emplear para que en la muestra estén representados todos los departamentos?

b) ¿Qué número de trabajadores de cada departamento habrá en la muestra?

Justifica tus respuestas.

a) En este caso se debe utilizar un muestreo aleatorio estratificado, ya que la población está dividida en cuatro estratos, los cuatro departamentos, y además se quiere que haya elementos en la muestra de todos los estratos.

b) La población está formada por $150 + 450 + 200 + 100 = 900$ elementos.

Los integrantes de la muestra de cada departamento se repartirán de forma proporcional a los trabajadores de cada departamento.

$$\frac{180}{900} = \frac{n_1}{150} = \frac{n_2}{450} = \frac{n_3}{200} = \frac{n_4}{100} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 0{,}2 \cdot 150 = 30 \\ n_2 = 0{,}2 \cdot 450 = 90 \\ n_3 = 0{,}2 \cdot 200 = 40 \\ n_4 = 0{,}2 \cdot 100 = 20 \end{cases}$$

Por tanto, en la muestra habrá:

- 30 trabajadores del departamento de personal.
- 90 trabajadores del departamento de ventas.
- 40 trabajadores del departamento de contabilidad.
- 20 trabajadores del departamento de atención al cliente.

Distribución en el muestreo de una proporción

8 Ante una medida adoptada por el Gobierno, se sabe que el 35% de la población está a favor de dicha medida. Se toma una muestra al azar de 200 personas.

a) ¿Qué número de personas se espera que estén a favor?

b) Halla la distribución en el muestreo de la proporción de personas que están a favor de esta medida.

c) Halla la probabilidad de que en la muestra elegida, más de la mitad de los integrantes que la forman estén a favor.

a) El número esperado será: $200 \cdot 0{,}35 = 70$ personas.

b) $\hat{P}$ seguirá una distribución normal:

$$N\left(p;\ \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = N\left(0{,}35;\ \sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{200}}\right) = N(0{,}35;\ 0{,}034)$$

c) $P(\hat{P} > 0{,}5) = P\left(Z > \dfrac{0{,}5 - 0{,}35}{0{,}034}\right) = P(Z > 4{,}41) \approx 0$

Es decir, es prácticamente imposible que más de la mitad de los integrantes de la muestra estén a favor de la medida.

Distribución en el muestreo de la media

9 La distribución de la temperatura del cuerpo humano en la población tiene una media de 37 °C y una desviación típica de 0,85 °C. Se elige al azar una muestra formada por 150 personas.

a) ¿Qué distribución sigue la media muestral?

b) Halla la probabilidad de que la media de la muestra sea inferior a 37,2 °C.

c) Halla la probabilidad de que la media esté comprendida entre 36,9 °C y 37 °C.

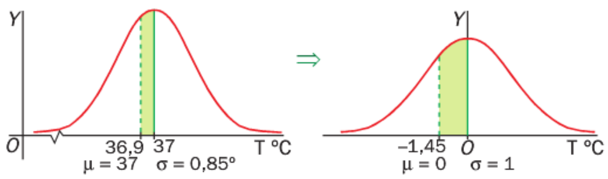
a) Como la muestra es grande, la media muestral $\bar{X}$ seguirá una distribución normal $N\left(\mu;\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(37;\ \dfrac{0{,}85}{\sqrt{150}}\right) = N(37;\ 0{,}069)$.

b) $P(\bar{X} < 37{,}2) = P\left(Z < \dfrac{37{,}2 - 37}{0{,}069}\right) = P(Z < 2{,}90) = 0{,}9981$

c) $P(36{,}9 \leqslant \bar{X} \leqslant 37) = P\left(\dfrac{36{,}9 - 37}{0{,}069} \leqslant Z \leqslant \dfrac{37 - 37}{0{,}069}\right) = P(-1{,}45 \leqslant Z \leqslant 0) =$

$= P(Z \leqslant 0) - P(Z < -1{,}45) = 0{,}5 - 1 + P(Z < 1{,}4) =$

$= 0{,}5 - 1 + 0{,}9265 = 0{,}4265$



10 Sea la población de elementos {22, 24, 26}.

PAU

a) Escribe todas las muestras posibles de tamaño 2, escogidas mediante muestreo aleatorio simple.

b) Calcula la media y la varianza de la población.

c) Calcula la varianza de las medias muestrales.

a) Suponiendo que en las muestras hay repetición y diferenciando el orden de selección, se tienen las siguientes muestras:

{22, 22}, {22, 24}, {22, 26}, {24, 22}, {24, 24}, {24, 26}, {26, 22}, {26, 24} y {26, 26}.

b) La media de la población es $\mu = \frac{22 + 24 + 26}{3} = 24$, y la varianza,

$$\sigma^2 = \frac{(22-24)^2 + (24-24)^2 + (26-24)^2}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}67.$$

c) Las medias de las muestras del apartado a son, respectivamente, 22, 23, 24, 23, 24, 25, 24, 25 y 26. La media de las muestras es:

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{22 + 23 + 24 + 23 + 24 + 25 + 24 + 25 + 26}{9} = 24$$

La varianza de las medias muestrales es:

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{9} = \frac{4}{3} = 1{,}33$$

Se tiene, por tanto, que $\sigma = \sqrt{\frac{8}{3}}$ y que $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

Observa que se verifica que $\mu = \mu_{\bar{X}}$ y que $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$.

Distribución de las sumas del muestreo

11 Los paquetes recibidos en un almacén tienen un peso medio de 300 kg y una desviación típica de 50 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que 25 de esos paquetes, elegidos al azar, excedan el límite de carga del montacargas donde se van a meter, que es de 8200 kg?

Se considera la distribución de la suma de los pesos de los 25 paquetes de la muestra:

$$T = N(25 \cdot 300,\ 50\sqrt{25}\,) = N(7500,\ 250)$$

La probabilidad que hay que hallar es:

$$P(T > 8200) = P\left(Z > \frac{8200 - 7500}{250}\right) = P(Z > 2{,}8) = 1 - P(Z \leqslant 2{,}8) =$$
$$= 1 - 0{,}9974 = 0{,}0026$$

Distribución en el muestreo de la diferencia de las medias

12 En un hospital, el peso de los niños recién nacidos tiene una media de 3,17 kg y una desviación típica de 0,148 kg, mientras que los pesos de las niñas recién nacidas tienen una media de 3,08 kg y una desviación típica de 0,105 kg. Se elige al azar una muestra formada por 40 niñas y 45 niños recién nacidos.

a) Halla la distribución que sigue la diferencia de medias.

b) Halla la probabilidad de que en la muestra elegida, la diferencia de medias sea superior a 100 g.

Como la muestra es grande, la distribución diferencia de medias $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ seguirá una normal.

a) $N\left(3{,}17 - 3{,}08;\ \sqrt{\frac{0{,}148^2}{45} + \frac{0{,}105^2}{40}}\right) = N(0{,}09;\ 0{,}028)$

b) $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0{,}1) = P\left(Z > \frac{0{,}1 - 0{,}09}{0{,}028}\right) = P(Z > 0{,}36) =$

$= 1 - P(Z \leqslant 0{,}34) = 1 - 0{,}6406 = 0{,}3594$