EJERCICIOS RESUELTOS: INTERVALOS DE CONFIANZA

Intervalo de confianza para el parámetro *p* de una binomial

7 PAU En una ciudad se seleccionó al azar una muestra de 225 familias. A cada familia seleccionada se le preguntó si tenía contratado algún seguro de incendios. Se obtuvo como resultado que 75 familias tenían contratado dicho seguro. A partir de esa información, determina, justificando la respuesta:

a) El intervalo de confianza al 95% para la proporción de familias de esa ciudad que tienen contratado algún seguro de incendios.

b) El error máximo que cometeríamos, con una confianza del 95%, si diéramos como estimación de dicha proporción el cociente $\frac{75}{225}$.

a) Del enunciado se deduce que:

$$\hat{p} = \frac{75}{225} = \frac{1}{3}; \qquad n = 225$$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

Sustituyendo en $IC = \left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ se obtiene:

$$IC = \left(\frac{1}{3} - 1{,}96\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{225}};\ \frac{1}{3} + 1{,}96\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{225}}\right) = (0{,}272;\ 0{,}395)$$

b) $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}062$

Por tanto, el error máximo que cometeríamos sería del 6,2%.

8 PAU De 1500 personas encuestadas en un sondeo preelectoral, 700 manifiestan su intención de no votar. ¿Entre qué valores puede estimarse, con un 95% de confianza, que se encontrará el nivel de abstención en el conjunto del censo?

a) Del enunciado se deduce que:

$$\hat{p} = \frac{700}{1500} = 0{,}47; \qquad n = 1500$$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

Sustituyendo en $IC = \left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ se obtiene:

$$IC = \left(0{,}47 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}47\cdot 0{,}53}{1500}};\ 0{,}47 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}47\cdot 0{,}53}{1500}}\right) = (0{,}444;\ 0{,}495)$$

Puede estimarse que la abstención estará entre el 44,4% y el 49,5%.

Intervalo de confianza para la media poblacional

9 PAU La longitud de la ballena azul se distribuye según una ley normal con desviación típica de 7,5 m. En un estudio estadístico realizado a 25 ejemplares se ha obtenido el intervalo de confianza (21,06; 26,94) para la longitud media.

a) Calcula la longitud media de los 25 ejemplares de la muestra.

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

a) El intervalo de confianza es simétrico respecto de la media. Por tanto, la media muestral viene dada por su punto medio: $\bar{x} = \frac{21{,}06 + 26{,}94}{2} = 24$ m.

b) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media $\bar{x}$, es:

$$IC = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo σ la desviación típica poblacional y $z_{\frac{\alpha}{2}}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

Del enunciado se deduce que: $\bar{x} = 24 \qquad \sigma = 7{,}5 \qquad n = 25$

$$IC = \left(24 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{7{,}5}{\sqrt{25}};\ 24 + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{7{,}5}{\sqrt{25}}\right) = (21{,}06;\ 26{,}94) \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{7{,}5}{\sqrt{25}} = 2{,}94 \Rightarrow$$

$\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow$ El nivel de confianza es del 95%.

10 PAU En una población, una variable aleatoria sigue una ley normal de media desconocida y desviación típica 9.

¿De qué tamaño, como mínimo, debe ser la muestra con la cual se estime la media poblacional con un nivel de confianza del 97% y un error máximo admisible igual a 3?

El error admisible viene dado por $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo σ la desviación típica poblacional, y n, el tamaño de la muestra.

Del enunciado se deduce que: $\sigma = 9$ $E = 3$

Para el 97% de confianza se tendrá $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17$.

$$n = \left(\frac{2{,}17 \cdot 9}{3}\right)^2 = 42{,}3801$$

Por tanto, el tamaño mínimo debe ser 43.

11 PAU Un supervisor somete una muestra de 16 fusibles a cierta sobrecarga. Los tiempos que tardaron en fundirse dieron una media de 10,63 minutos. Considerando que la variable "tiempo que tarda en fundirse un fusible sometido a esa sobrecarga" es normal con desviación típica de 2,48 minutos:

a) Construye un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95%.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que el error de estimación de la media sea inferior a 1 minuto, con un nivel de confianza del 95%?

a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media $\bar{x}$, es:

$$IC = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo σ la desviación típica poblacional, y $z_{\frac{\alpha}{2}}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

Del enunciado se deduce que: $\bar{x} = 10{,}63$ $\sigma = 2{,}48$ $n = 16$

Para el 95% de confianza, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$, se tendrá:

$$IC = \left(10{,}63 - 1{,}96 \frac{2{,}48}{\sqrt{16}};\ 10{,}63 + 1{,}96 \frac{2{,}48}{\sqrt{16}}\right) = (9{,}41;\ 11{,}84)$$

b) El error viene dado por $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para $E = 1 \quad \Rightarrow \quad n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 2{,}48}{1}\right)^2 = 23{,}62$

Se deberán tomar muestras de tamaño 24 o más.

Intervalo de confianza para la diferencia de las medias muestrales

12 PAU De una población de personas comparables con exceso de peso se seleccionan dos grupos, *A* y *B*, de 100 y 50 individuos, respectivamente. A los individuos del grupo *A* se les suministra una nueva dieta D_1, con la que sufren una pérdida media de peso al cabo de un mes de 7,9 kg con una desviación típica de 0,2 kg. A los individuos del grupo *B* se les suministra una dieta D_2, con la que sufren una pérdida media de peso al cabo de un mes de 6,8 kg, con una desviación típica de 0,3 kg. Halla los límites de confianza del 95% para la diferencia del número medio de kg perdidos producido por el suministro de las dos dietas D_1 y D_2.

Del enunciado se deduce que:

Grupo *A*	Grupo *B*
$n_1 = 100$ personas	$n_2 = 50$ personas
$\bar{x}_1 = 7{,}9$ kg	$\bar{x}_2 = 6{,}8$ kg
$\hat{s}_1 = 0{,}2$ kg	$\hat{s}_2 = 0{,}3$ kg

El intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales al nivel del 95% viene dado por la expresión:

$$IC = \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{s}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{s}_2^2}{n_2}}\right)$$

Sustituyendo los datos en la expresión anterior se obtiene:

$$IC = \left(7{,}9 - 6{,}8 \pm 1{,}96 \sqrt{\frac{0{,}2^2}{100} + \frac{0{,}3^2}{50}}\right) = (1{,}008;\ 1{,}192)$$

Luego el intervalo de confianza para la diferencia del número medio de kg perdidos por ambas dietas al nivel del 95% es: (1,008; 1,192).