EJERCICIOS RESUELTOS: CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Contraste para la proporción de una distribución binomial

4 PAU El alcalde de una ciudad prometió en su programa oponerse a la construcción de una central de tratamiento de ciertos residuos, puesto que en aquel momento sólo un 10% de los ciudadanos estaban a favor de la central. En los últimos días se ha encuestado a 100 personas de las cuales 14 están a favor de la central. El alcalde afirma, sin embargo, que el porcentaje de ciudadanos a favor sigue siendo del 10% o incluso ha disminuido.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis defendida por el alcalde frente a que sucedió lo contrario, como parecen indicar los datos. Si se concluye que el porcentaje ha aumentado y la hipótesis del alcalde fuera falsa, ¿cómo se llama el error cometido?

b) Explica claramente a qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior para un nivel de significación del 5%.

a) Hipótesis nula H_0: $p_0 \leqslant 0,1$ (el alcalde tiene razón)

Hipótesis alternativa H_a: $p_0 > 0,1$ (el porcentaje ha aumentado)

Se trata de un contraste unilateral para la proporción.

Si se concluyera que la proporción ha aumentado y esto fuera falso, se diría que se comete un error de tipo I.

b) 1.º Se formulan las hipótesis:

Hipótesis nula H_0: $p_0 \leqslant 0,1$ (el alcalde tiene razón)

Hipótesis alternativa H_a: $p_0 > 0,1$ (el porcentaje ha aumentado)

Contraste unilateral para la proporción.

2.º Se elige el estadístico del contraste:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o(1-p_o)}{n}}}$$

3.º Se determina la región de aceptación:

$\alpha = 0,05 \quad \Rightarrow \quad 1 - \alpha = 0,95 \quad \Rightarrow \quad z_\alpha = 1,645$

La región de aceptación es $(-\infty; 1,645)$.

4.º Se sustituyen los datos en el estadístico del contraste y se efectúan los cálculos:

$p_0 = 0,10 \qquad \hat{p} = 0,14 \qquad n = 100$

$$Z = \frac{0,14 - 0,10}{\sqrt{\dfrac{0,10 \cdot 0,90}{100}}} = 1,33$$

5.º Se acepta o se rechaza la hipótesis nula.

Como $1,33 \in (-\infty; 1,645)$, se acepta la hipótesis nula.

6.º Se interpreta la decisión:

La situación no ha cambiado.

Contraste para la media de una distribución normal

5 PAU El número de reclamaciones presentadas durante la campaña de Navidad en 9 tiendas de una empresa ha sido:

25, 31, 28, 30, 32,
20, 22, 34, 30

Se acepta que estos números de reclamaciones siguen una distribución normal con desviación típica igual a 5. Se desea contrastar si el número de reclamaciones es 26, con un nivel de significación de 0,05.

a) Plantéense cuáles son las hipótesis nula y alternativa en el contraste.

b) Determínese la región crítica de contraste.

c) ¿Es posible aceptar la hipótesis con el nivel de significación indicado?

a) Hipótesis nula H_0: $\mu_0 = 26$

Hipótesis alternativa H_a: $\mu_0 \neq 26$

b) Se trata de un contraste bilateral para la media.

$\alpha = 0,05 \quad \Rightarrow \quad 1 - \alpha = 0,95 \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

La región de aceptación es $(-1,96; 1,96)$.

Por tanto, la región crítica es $(-\infty, -1,96) \cup (1,96; +\infty)$.

c) Del enunciado se deduce:

$\mu_0 = 26$ reclamaciones $\qquad \sigma = 5$ reclamaciones $\qquad n = 9$ tiendas

La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{25 + 31 + 28 + 30 + 32 + 20 + 22 + 34 + 30}{9} = \frac{252}{9} = 28 \text{ reclamaciones}$$

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{28 - 26}{\dfrac{5}{\sqrt{9}}} = 1,2.$

Como $1,2 \in (-1,96; 1,96)$, se acepta la hipótesis nula.

Por tanto, aceptamos que el número medio de reclamaciones presentadas es 26.

Contraste para la diferencia de las medias de distribuciones normales

6 En un estudio de mercado se necesita comparar las ventas en los meses de diciembre de dos años consecutivos para decidir si existen diferencias significativas entre ambos. Se dispone de datos de ventas del primer año en 52 tiendas que proporcionan una media muestral de 942,30 euros y desviación típica de 49 euros. En el segundo año se han observado las ventas en 64 tiendas obteniendo una venta media de 981,20 euros y una desviación típica de 74 euros.

a) Plantea un contraste de hipótesis para decidir si existen diferencias entre las ventas en ambos meses de diciembre.

b) Contrasta las hipótesis con un nivel de significación de 0,05.

c) ¿Cuál es el error de tipo I en este contraste? ¿Con qué probabilidad se comete?

d) ¿En qué consiste el error de tipo II?

a) Hipótesis nula H_0: $\mu_1 = \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1 - \Leftrightarrow \mu_2 = 0$. No hay diferencia en las ventas.
Hipótesis alternativa H_a: $m_1 \neq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Hay diferencia en las muestras.

b) Se trata de un contraste bilateral para la diferencia de medias de las ventas.
$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ Región de aceptación: $(-1,96; 1,96)$

Como no se conocen las desviaciones de las poblaciones, se calculan las cuasivarianzas muestrales.

$$\hat{s}_1^2 = \frac{52}{51} \cdot 2401 = 2448,08 \qquad \hat{s}_2^2 = \frac{64}{63} \cdot 5476 = 5562,92$$

El estadístico del contraste es:

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\hat{s}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{s}_2^2}{n_2}}} \Rightarrow \frac{942,3 - 981,2}{\sqrt{\frac{2448,08}{52} + \frac{5562,92}{64}}} = 3,36$$

Como $3,36 \notin (-1,96; 1,96)$, se rechaza la hipótesis nula; por tanto, se acepta que hay diferencias significativas entre el valor de las ventas del producto en los meses de diciembre.

c) El error de tipo I consistiría en decidir que las ventas son distintas en ambos períodos cuando realmente no difieren. La probabilidad de cometer este error es de 0,05.

d) El error de tipo II consiste en afirmar que el importe de las ventas ha sido diferente en ambos meses.

Analogías y diferencias entre los intervalos de confianza y el contraste de hipótesis

7 PAU El consumo de carne de pollo parece haberse disparado desde que hace unos meses cundió la alarma sobre otros tipos de carne. En cierta carnicería, las ventas diarias de carne de pollo seguían hasta entonces una normal de media 19 kilos y desviación típica 3 kilos. En una muestra de 35 días posteriores a la citada alarma se obtuvo una media de 21 kilos de carne de pollo vendidos al día.
Suponiendo que las ventas siguen una normal con la misma desviación típica:

a) Plantea un test para contrastar que la venta de pollo no ha aumentado, frente a que sí lo ha hecho, como parecen indicar los datos. ¿A qué conclusión se llega a un nivel de significación del 5%?

b) Calcula un intervalo de confianza del 95% para la venta diaria media de carne

a) 1.º Se formulan las hipótesis:
H_0: $\mu_0 = 19$ kg
H_a: $\mu_0 > 19$ kg (la media ha aumentado).
Contraste unilateral para la media poblacional.

2.º Se elige el estadístico del contraste:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

3.º Se determina la región de aceptación:
Si $\alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_\alpha = 1,645$
La región de aceptación es $(-\infty; 1,645)$.

4.º Se sustituyen los datos en el estadístico del contraste y se efectúan los cálculos:
$\mu_0 = 19$ kg $\quad \sigma = 3$ kg $\quad n = 35$ días $\quad \bar{x} = 21$ kg

$$Z = \frac{21 - 19}{\frac{3}{\sqrt{35}}} = 3,94$$

5.º Se acepta o se rechaza la hipótesis nula:
Como $3,94 \notin (-\infty; 1,64)$, se rechaza la hipótesis nula.

6.º Se interpreta la decisión:
Se llega a la conclusión con un nivel de significación del 5% de que la media ha aumentado.

b) Si $\alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

El intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$IC = \left(\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(21 \pm 1,96 \frac{3}{\sqrt{35}}\right) = (20,01; 21,99)$$