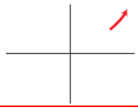
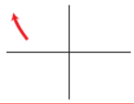
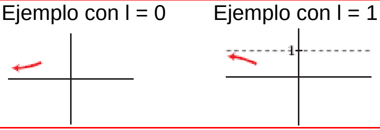
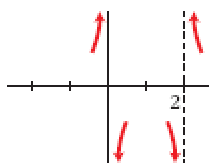
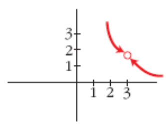
LÍMITES DE FUNCIONES (resumen)

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

$\lim_{x \to k} f(x)$ se lee: límite de la función f(x) cuando x tiende a k

Límite	Idea intuitiva del significado	Representación gráfica
	Cuando $x \to +\infty$	
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$	Al aumentar x, los valores de f(x) se van acercando al valor l. (el límite de f(x) es finito)	Ejemplo con l = - 1 Ejemplo con l = 0 
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	Al aumentar x, los valores de f(x) crecen cada vez más.	
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	Al aumentar x, los valores de f(x) son cada vez "más negativos".	
	Cuando $x \to -\infty$	
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	Al tomar x valores negativos pero cada vez más grandes en valor absoluto, los valores de f(x) crecen cada vez más.	
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	Al tomar x valores negativos pero cada vez más grandes en valor absoluto, los valores de f(x) son cada vez "más negativos".	
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$	Al tomar x valores negativos pero cada vez más grandes en valor absoluto, los valores de f(x) se van acercando al valor l. (el límite de f(x) es finito)	Ejemplo con l = 0 Ejemplo con l = 1 
	Cuando $x \to a$	
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ Estudiamos los LÍMITES LATERALES	**Por la derecha de a: $x \to a^+$** $\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty}$ **:** Al ir tomando x valores cercanos pero **mayores** que "a", la función va hacia $+\infty$ $\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty}$ **:** Al ir tomando x valores cercanos pero **mayores** que "a", la función va hacia $-\infty$ **Por la izquierda de a: $x \to a^-$** $\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty}$ **:** Al ir tomando x valores cercanos pero **menores** que "a", la función va hacia $+\infty$ $\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty}$ **:** Al ir tomando x valores cercanos pero **menores** que "a", la función va hacia $-\infty$	En este ejemplo: Cuando $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$ Cuando $x \to 0^-$, $f(x) \to +\infty$ Cuando $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$ Cuando $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$ 
$\lim_{x \to a} f(x) = l$	Al ir tomando x valores cercanos a "a", los valores correspondientes de f(x) se van acercando al valor l. (el límite de f(x) es finito)	Ejemplo con $a = 3$ y $l = \frac{5}{3}$ 

Ejemplo 1.:

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2+4x-45}{2x-10}$

Veamos hacia dónde se acerca la función $f(x)=\dfrac{x^2+4x-45}{2x-10}$, cuando x tiende a 5, creando una tabla de valores cercanos a 5:

x	4,99	4,999	4,9999	5,0001	5,000001	5,00000001
f(x)	6,995	6,9995	6,99995	7,00005	7,0000005	6,99999991

$$f(4{,}99)=\frac{4{,}99^2+4\cdot 4{,}99-45}{2\cdot 4{,}99-10}=6{,}995$$

Se puede observar que los valores de la función se acercan a 7, por tanto, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=7$

b) Elabora una tabla como en el ejemplo anterior para comprobar el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+6x-27}{2x-6}=6$$

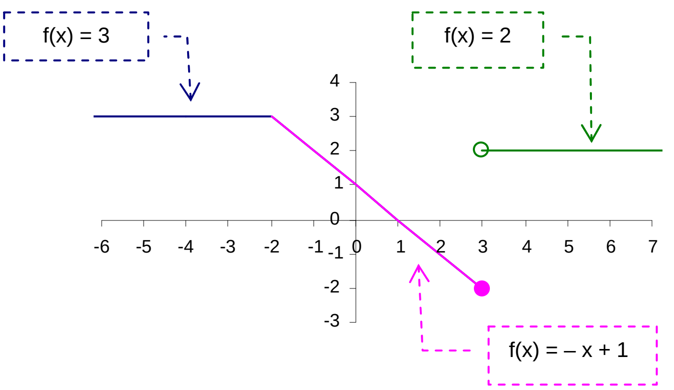
OBSERVACIÓN: Una función f(x) tiene límite en un punto "a" si y sólo si existen los límites laterales y coinciden; siendo dicho valor el límite de la función. Si alguno de los límites laterales no existe o no coinciden, entonces la función no tiene límite en ese punto "a".

Ejemplo 2.:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+1}{x-2}=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+1}{x-2}=-\infty$

La función no tiene límite cuando x tiende a 2

b) $f(x)=\begin{cases} 3 & x\le -2 \\ -x+1 & -2<x\le 3 \\ 2 & x>3 \end{cases}$



Aunque puede deducirse observando su gráfica, veamos qué ocurre en los puntos de cambio de expresión de esta función definida a trozos:

Cuando x → -2

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(-x+1)=3 \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} 3=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^-} f(x)=3 \Rightarrow \lim_{x\to -2} f(x)=3$$

Cuando x → 3

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} 2=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(-x+1)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Los límites laterales no coinciden} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 3} f(x)$$

PROPIEDADES Y OPERACIONES CON LÍMITES FINITOS:

Las propiedades que aparecen a continuación vienen expresadas para x tendiendo a infinito pero son válidas para x tendiendo a un valor cualquiera.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} k = k$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = m$, entonces:

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ (Siempre que $m \neq 0$ y $g(x) \neq 0$)

5. Si f(x)>0, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)} = l^m$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)} = \sqrt[n]{l}$ (Cuando n es impar o n par y $f(x) \geq 0$)

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} [\log_a f(x)] = \log_a\left[\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right]$ (Si a > 0 y f(x) > 0)

OPERACIONES CON EXPRESIONES INFINITAS:

- $\infty + l = \infty$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $-(-\infty) = +\infty$
- $\infty \cdot l = \begin{cases} +\infty & \text{si } \infty \text{ y } l \text{ igual signo} \\ -\infty & \text{si } \infty \text{ y } l \text{ distinto signo} \end{cases}$ (Ej: $+\infty \cdot (-3) = -\infty$; $-\infty \cdot (-3) = +\infty$)
- $\dfrac{l}{\infty} = 0$
- $\dfrac{l}{0} = \infty$ Si $l \neq 0$ (Como se verá más adelante, podría ser necesario decidir el signo (+) o (–) de ∞)
- $\dfrac{\infty}{0} = \infty$
- $\dfrac{0}{\infty} = 0$
- $l^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } l > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < l < 1 \end{cases}$; $l^{-\infty} = \dfrac{1}{l^{+\infty}} \to$ el resultado depende de lo obtenido para $l^{+\infty}$
- $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$; $(+\infty)^{-\infty} = 0$
- $(+\infty)^{l} = \begin{cases} +\infty & \text{si } l > 0 \\ 0 & \text{si } l < 0 \end{cases}$

CÁLCULO DE LÍMITES

Para encontrar el límite de una función, el primer paso será **sustituir x por el valor al que tiende**. Tras el cálculo de la función en dicho valor, podemos obtener uno de los resultados siguientes: un número l, $+\infty$, $-\infty$, o bien una expresión de la que no podemos deducir una solución concreta. Esta última situación es lo que se conoce como **indeterminación**.

Ejemplo 3.:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-1}{x+5} = \dfrac{2^2-1}{2+5} = \dfrac{3}{7}$ El límite de la función cuando x tiende a 2 es $\dfrac{3}{7}$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{1^2+1}{1-1}=\frac{2}{0}=\infty$

Estudiando la diferencia x –1 podemos observar lo siguiente:

- si nos acercamos a x con valores mayores que 1 (por ejemplo 1,01, 1,001, 1,00001, etc.), estas diferencias tienen signo positivo y como el numerador es positivo, el cociente es de signo positivo dando como resultado final $+\infty$.
- si nos acercamos a x con valores menores que 1 (por ejemplo 0,99, 0,999, 0,99999, etc.), estas diferencias tienen signo negativo y como el numerador es positivo, el cociente sería negativo dando como resultado final $-\infty$.

En este ejemplo, hemos tenido que recurrir a los límites laterales (por la derecha en el primer caso y por la izquierda en el segundo) para concluir el resultado.

c) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4+2x-4}{x^3-x+1}=\frac{\infty}{\infty}$ Teniendo en cuenta las operaciones con expresiones infinitas, sería difícil decidir el resultado de este cociente. Estamos ante una indeterminación, no sabemos cuál de las dos funciones, la del numerador o la del denominador, va más rápido a infinito o si van a la par.

A continuación comentaremos algunos tipos de indeterminaciones y la forma de resolverlas.

INDETERMINACIONES:

$\frac{k}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty-\infty$; 1^{∞}; $0\cdot\infty$; $\frac{0}{0}$; ∞^0; 0^0 (Estas dos últimas se verán más adelante)

$$\boxed{\frac{k}{0}}$$

Surge cuando, al sustituir x por el valor al que tiende, el numerador da como resultado un número real y el denominador se anula. El resultado es ∞ pero habrá que efectuar los límites laterales para estudiar el signo final del cociente.

Ejemplo 4.:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5}{x-2}=\frac{2^2-5}{2-2}=\frac{-1}{0}=\infty$

Signo del cociente: $\frac{-}{+}=-$

Límite por la derecha: $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-5}{x-2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

Las diferencias del denominador para valores mayores que 2 son positivas, nos acercamos a 0 con valores positivos.

Signo del cociente: $\frac{-}{-}=+$

Límite por la izquierda: $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-5}{x-2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$

Las diferencias del denominador para valores menores que 2 son negativas, nos acercamos a 0 con valores negativos.

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-x^2+6}{x+1}=\dfrac{2(-1)^3-(-1)^2+6}{-1+1}=\dfrac{-2-1+6}{0}=\dfrac{3}{0}=\infty$

Signo del cociente: $\dfrac{+}{+}=+$

Límite por la derecha: $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x^3-x^2+6}{x+1}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

Valores mayores que -1 y cercanos a -1 son por ejemplo: -0,99, -0,999, -0,99999, etc. Los resultados de x+1 son positivos.

Por la izquierda de -1 → ← Por la derecha de -1

-2 -1 0

Signo del cociente: $\dfrac{+}{-}=-$

Límite por la izquierda: $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x^3-x^2+6}{x+1}=\dfrac{3}{0^-}=-\infty$

Valores menores que -1 y cercanos a -1 son por ejemplo: -1,01, -1,001, -1,00001, etc. Los resultados de x+1 son negativos.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2}{x^2-2x+1}=\dfrac{1^2-2}{1^2-2\cdot 1+1}=\dfrac{-1}{0}=\infty$

En este caso, podemos proceder de la misma manera que en los ejemplos anteriores estudiando los límites laterales, o bien, si observamos el denominador, vemos que se trata de la identidad notable siguiente: $(x-1)^2$. Como el cuadrado de cualquier cantidad siempre es positivo y el numerador es negativo, el cociente final es negativo, es decir:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2}{(x-1)^2}=\frac{1^2-2}{(1-1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

(Comprueba que calculando los límites laterales el resultado sería el mismo, $-\infty$)

$\dfrac{\infty}{\infty}$

Si P(x) y Q(x) son polinomios, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\infty & \text{si grado de } P(x) > \text{grado de } Q(x)\\ 0 & \text{si grado de } P(x) < \text{grado de } Q(x)\\ \text{Cociente de los coeficientes de mayor grado} & \text{si grado de } P(x) = \text{grado de } Q(x)\end{cases}$

En el infinito se comporta como si fuese el cociente de los términos de mayor grado, el resto de los términos pueden despreciarse por ser "muy pequeños" frente a los anteriores.

Ejemplo 5.:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^4-3x-1}{x^2-x+1} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\boxed{-4x^5}+x^3-12}{\boxed{2x^3}-3x+5} = -\infty$

Mayor grado en el numerador $\Rightarrow$ queda ∞

El signo viene dado por el cociente de los signos de los términos de mayor grado

signo : $\dfrac{-}{+} = -$

Cuando aparece alguna raíz, $\sqrt[p]{ax^n+\ldots}$, se comporta como $\sqrt[p]{ax^n}$, es decir, como $\sqrt[p]{a}\cdot x^{\frac{n}{p}}$.

Si a < 0 y p par, entonces no tiene límite ya que no existe la raíz de índice par de números negativos.

Ejemplo 6.:

Grado 2

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\boxed{2x^2}+3}{\boxed{\sqrt{4x^4}}-3x} = \dfrac{2}{2} = 1$

Se comporta como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{2x^2}$, que se trata de un cociente de dos polinomios del mismo grado

Es del orden de $\sqrt{4x^4}$, es decir, $2x^2$

Es del orden de $\sqrt{5}\cdot x^{\frac{3}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\boxed{\sqrt{5x^3}}-2x}{\boxed{2x}+5} = +\infty$

Grado 1

Se comporta como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{5}\cdot x^{\frac{3}{2}}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{5}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{2}$

La técnica que se utiliza para deducir el resultado de este tipo de indeterminaciones consiste en dividir el numerador y el denominador por el término de mayor grado.

Ejemplo 7.:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^4-3x-1}{x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2x^4}{x^4}-\frac{3x}{x^4}-\frac{1}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}-\frac{x}{x^4}+\frac{1}{x^4}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}} = +\infty$

Cada uno de estos términos tiende a 0

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x^3-12}{2x^3-3x+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{-4x^3}{x^3}-\frac{12}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{5}{x^3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4-\frac{12}{x^3}}{2-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}} = \dfrac{-4}{2} = -2$

Cada uno de ellos tiende a 0

$\infty - \infty$

Si no hay radicales, efectuaremos la operación.

Ejemplo 8.:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x+1}-\frac{x^2-2}{x-1}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+3)(x-1)-(x+1)(x^2-2)}{(x+1)(x-1)}=$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+3x-3-(x^3+x^2-2x-2)}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+3x-3-x^3-x^2+2x+2}{x^2-1}=$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+5x-1}{x^2-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}-2$

Grados iguales

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-\frac{3x^2-2}{x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)\cdot x-(x+1)(3x^2-2)}{(x+1)\cdot x}=$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x-(3x^3+3x^2-2x-2)}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x-3x^3-3x^2+2x+2}{x^2+x}=$

Signo: (–)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\boxed{-2x^3}-3x^2+3x+2}{\boxed{x^2}+x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}-\infty$

Signo: (+)

El grado del numerador es mayor que el del denominador, por tanto el resultado es ∞ y el signo final es el cociente de los signos de los coeficientes de mayor grado: $\frac{-}{+}=-$

Si hay radicales, multiplicamos y dividimos por el **conjugado** de cada una de las expresiones que dan como resultado $\infty-\infty$.

Los conjugados de expresiones del tipo $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $\sqrt{a}-b$, $a-\sqrt{b}$ son, respectivamente, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\sqrt{a}+b$, $a+\sqrt{b}$.

Ejemplo 9.:

a) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3}-2x)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-3}-2x)(\sqrt{x^2-3}+2x)}{\sqrt{x^2-3}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3-4x^2}{\sqrt{x^2-3}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2-3}{\sqrt{x^2-3}+2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}-\infty$

Grado del numerador: 2
Grado del denominador: 1

Signo: $\frac{-}{+}=-$

b) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+2})\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+2})(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+2}}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-(x^2+2)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2+2}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+2}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+2}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\frac{-1}{2}$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+1}-x}=\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador y también por el del numerador, ya que ambas expresiones originan una indeterminación del tipo ∞ - ∞

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+1}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)(\sqrt{x+1}+x)}{(\sqrt{x+1}-x)(\sqrt{x}+x)(\sqrt{x+1}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-x^2)(\sqrt{x+1}+x)}{(x+1-x^2)(\sqrt{x}+x)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x+1}-x^2\sqrt{x+1}+x^2-x^3}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x^2\sqrt{x}+x^2+x-x^3}=\frac{-1}{-1}=1$$

Grados iguales: grado 3

d) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}-x}=\frac{1}{\infty-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x}{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x}{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x}{x-x^2}=0$$

gr. numerador < gr. denominador

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador, que es la expresión con resultado ∞ - ∞

1^{∞} (Límites del tipo del número e)

Cuando se desea calcular el límite de una función cuya expresión es una potencia en la que tanto la base como el exponente son funciones, puede darse el caso en el que la base tienda hacia 1 y el exponente hacia infinito. Estamos entonces ante una indeterminación del tipo 1^{∞}, que se resolverá utilizando la expresión cuyo límite es el número e:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Podemos generalizarlo para una función f(x) de la forma siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e \quad \text{si } \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

o bien

$$\lim_{x\to+\infty}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e \quad \text{si } \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

Estos resultados también son válidos para el caso en el que x tienda hacia un número “a” en lugar de tender hacia infinito.

La clave está en que la base tienda hacia 1 y el exponente hacia infinito. Después, bastará con realizar las transformaciones necesarias en la expresión inicial hasta obtener el aspecto de una de las situaciones anteriores, generándose así una potencia del número e.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 10.:

El exponente, 7x, tiende a infinito, pero no es la función f(x) = 2x. Por tanto, habrá que multiplicar y dividir por dicha expresión para que aparezca.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{7x} \overset{(1^{+\infty})}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}}_{e}\right]^{\frac{7x}{2x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{7x}{2x}} = e^{\frac{7}{2}}$

Esta expresión tiende a cero, puesto que el denominador tiende a infinito. f(x) = 2x

También podíamos haber multiplicado y dividido el exponente por 2, en lugar de 2x, y tomar la x que aparece ya en dicho exponente. De esta forma, no habría sido necesario simplificar la x después, habría quedado directamente la constante 7/2.

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+3}\right)^{x} \overset{(1^{+\infty})}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x^2+3}\right)^{(x^2+3)}}_{e}\right]^{\frac{x}{x^2+3}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+3}} = e^0 = 1$

Es un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{(x^3-2)} \overset{(1^{+\infty})}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2}{x^2-1}-1\right)^{(x^3-2)} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2-(x^2-1)}{x^2-1}\right)^{(x^3-2)} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2-x^2+1}{x^2-1}\right)^{(x^3-2)} =$

Sumamos y restamos 1 y después operamos para transformar la expresión y conseguir una base de la forma

$1+\frac{1}{f(x)}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{(x^3-2)} = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{(x^2-1)}}_{e}\right]^{\frac{x^3-2}{x^2-1}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2}{x^2-1}} = e^{+\infty} = +\infty$

d) $\lim_{x\to1}(1+x^3-x)^{\frac{1}{x^2-1}} \overset{(1^{+\infty})}{=} \lim_{x\to1}\left[\underbrace{[1+(x^3-x)]^{\frac{1}{(x^3-x)}}}_{e}\right]^{\frac{x^3-x}{x^2-1}} = e^{\lim_{x\to1}\frac{x^3-x}{x^2-1}} = e^{\lim_{x\to1}\frac{x\cancel{(x^2-1)}}{\cancel{x^2-1}}} = e^{\lim_{x\to1}x} = e^1 = e$

$0 \cdot \infty$

Surge cuando aparece el producto de dos funciones tendiendo una de ellas a 0 y la otra a infinito. En este caso, transformaremos la expresión de forma que obtengamos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$.

Ejemplo 11.:

a) $\lim_{x\to+\infty}(x+2)\cdot\sqrt{\frac{1}{9x^2+3}} \overset{(\infty\cdot 0)}{=} \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(x+2)^2}{9x^2+3}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+4x+4}{9x^2+3}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+4}{9x^2+3}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

Si introducimos el factor (x+2) bajo la raíz, obtenemos una expresión de tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
Para incluir un factor en una raíz, lo introduciremos elevándolo al índice de dicha raíz.

Propiedad 6

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ con grados iguales

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{18x^2-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{32x^2-5}}\right) \overset{(\infty\cdot 0)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{18x^2-1}}{\sqrt{32x^2-5}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{18x^2-1}{32x^2-5}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{18x^2-1}{32x^2-5}} = \sqrt{\frac{18}{32}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

$\frac{0}{0}$

Se presenta en situaciones en las que el valor hacia el que tiende x es una raíz tanto de la función del numerador como de la del denominador.

Cuando aparecen polinomios: Factorizamos y simplificamos.

Ejemplo 12.:

a) $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^2-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot\cancel{(x+1)}} = \lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x-1} = \frac{-1-2}{-1-1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

b) $\lim_{x\to0}\frac{x^3-x^2}{x^2+2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to0}\frac{x^2(x-1)}{x(x+2)} = \lim_{x\to0}\frac{x\cdot(x-1)}{x+2} = 0$

c) $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x^2-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)\cdot(x^2+4)}{x^2-4} = \lim_{x\to2}(x^2+4) = 2^2+4 = 8$

El numerador es una identidad notable, una diferencia de cuadrados que se descompone en suma por diferencia.

Cuando aparecen raíces: Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión que se anula.

Ejemplo 13.:

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

a) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

b) $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-2)}{x^2-16}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{x}+2)}{(x-4)\cdot(x+4)\cdot(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}\cdot\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}\cdot(x+4)\cdot(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}}{(x+4)\cdot(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{4}}{(4+4)\cdot(\sqrt{4}+2)}=\frac{2}{8\cdot 4}=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$$

c) $$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-\sqrt{x})\cdot(x+\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot(x+\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{x})}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}}=\frac{1\cdot(\sqrt{1}+1)}{1+\sqrt{1}}=1$$

d) $$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+6x+9}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+3)^2}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{0}=\infty$$ Estudiamos los límites laterales

Por la derecha: $\lim_{x\to -3^+}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

Por la izquierda: $\lim_{x\to -3^-}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{0^-}=-\infty$