ANÁLISIS

1.- SOBRE LÍMITES DE UNA FUNCIÓN

- Comparación de límites infinitos.

  Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$, se dice que f(x) es un **infinito de orden superior** a g(x) si se cumple que:

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \text{, o lo que es lo mismo, } \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 .$$

  (Las funciones EXPONENCIALES (base mayor que 1) son infinitos de orden superior a las POTENCIAS que, a su vez, son infinitos de orden superior a los LOGARITMOS).

- Límites en $-\infty$.

  A menudo resulta cómodo aplicar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.

- Indeterminaciones: $\infty - \infty$; $\pm\infty \cdot 0$; $\frac{0}{0}$; ∞^0; $1^{\pm\infty}$; 0^0; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

- Límites de la forma 1^∞. Es muy útil aplicar la siguiente propiedad:

  Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} [f(x)-1]\cdot g(x)}$.

- Límites laterales.

  $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(c-\varepsilon) \\ \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(c+\varepsilon) \end{cases}, \quad \forall \varepsilon > 0 .$$

  No obstante, se puede utilizar la calculadora para justificar fácilmente el valor de los límites laterales.

- Además, según los diferentes tipos de indeterminaciones se siguen procedimientos algebraicos sencillos (factorizar y simplificar, multiplicar y dividir por el conjugado, efectuar la resta de fracciones algebraicas,...) que permiten calcular el valor del límite.

2.- CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

- Una función f es **continua** en un punto x_0 si verifica:

  1) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, es decir, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

  2) $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k \quad \forall k \in \mathbb{R}$

- Si la función está definida a trozos

  $$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si} & x < x_0 \\ f_2(x) & \text{si} & x \geq x_0 \end{cases}$$

  entonces

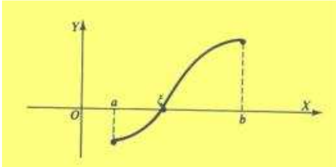
  $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$$

  $$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = f_2(x_0)$$

3.- TEOREMAS DE CONTINUIDAD EN INTERVALOS

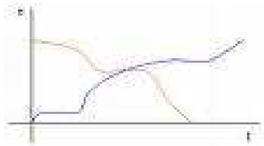
- <u>TEOREMA DE BOLZANO</u>.

  Si f(x) es continua en $\left[a,b\right]$ y "signo de f(a)" ≠ "signo de f(b)", entonces $\exists c \in (a,b) / f(c) = 0$.



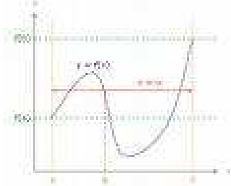
- <u>COROLARIO DEL TEOREMA DE BOLZANO</u>.

  Si f y g son continuas en $\left[a,b\right]$, $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$, entonces $\exists c \in (a,b) / f(c) = g(c)$.



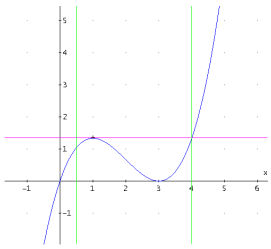
- <u>TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS</u>.

  Si f(x) es continua en $\left[a,b\right]$ entonces toma todos los valores intermedios entre f(a) y f(b), es decir, $\forall k \in \left[f(a), f(b)\right]$ $\exists c \in (a,b) / f(c) = k$.



- <u>TEOREMA DE WEIERSTRASS</u>.

  Si f(x) es continua en $\left[a,b\right]$ entonces tiene un máximo y un mínimo absoluto en ese intervalo, es decir, $\exists c, d \in [a,b] / \forall x \in [a,b], f(d) \le f(x) \le f(c)$.



4.- DEFINICIÓN DE DERIVADA

Derivada de una función f en un punto x_0: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

La definición de **función derivada** es similar: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA ≡ VELOCIDAD INSTANTÁNEA ≡ DERIVADA EN UN PUNTO ≡ PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE

5.- DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

Una función f es **derivable** en un punto x_0 si verifica:

1) f es continua en x_0.
2) Existe la derivada en x_0, es decir, coinciden sus derivadas laterales:

$$f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$$

6.- DERIVADAS MÁS FRECUENTES.

- $D\left[\{f(x)\}^n\right] = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
- $D\left[e^{f(x)}\right] = f'(x) \cdot e^{f(x)}$; $D\left[e^x\right] = e^x$
- $D\left[a^{f(x)}\right] = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$; $D\left[a^x\right] = a^x \cdot \ln a$
- $D[\ln f(x)] = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- $D[\text{sen } f(x)] = f'(x) \cdot \cos f(x)$
- $D[\cos f(x)] = -f'(x) \cdot \text{sen } f(x)$
- $D[\text{tg } f(x)] = f'(x) \cdot \left[1 + \text{tg}^2 f(x)\right]$
- $D[\text{arc sen } f(x)] = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$
- $D[\text{arc cos } f(x)] = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$
- $D[\text{arc tg } f(x)] = \dfrac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$

7.- DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Es un proceso que nos permite calcular la derivada de la función de la forma

$$y = (f(x))^{g(x)}$$ (la base y el exponente dependen de x)

y consiste en aplicar los siguientes pasos:

1. Tomamos logaritmos a ambos lados de la igualdad
$$\ln y = \ln (f(x))^{g(x)}$$
2. Aplicamos la propiedad 3 de los logaritmos al segundo miembro
$$\ln y = g(x) \cdot \ln (f(x))$$
3. Derivamos ambos miembros de la igualdad
$$\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln (f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$
4. Despejamos la derivada sustituyendo y por su valor
$$y' = \left[g'(x) \cdot \ln (f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right] \cdot [f(x)]^{g(x)}$$

8.- ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

- Se trata de calcular la ecuación de la recta tangente a la curva y = f(x) en el punto de abscisas x_0. Por tratarse de una recta, su ecuación en forma de punto-pendiente será

$$\boxed{r_t : y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}.$$

Se calcula la segunda coordenada del punto: $y_0 = f(x_0)$, y la pendiente de la recta tangente: $m = f'(x_0)$. Se sustituyen ambos valores y ya tenemos la ecuación.

- Otra versión del problema consiste en averiguar el punto donde la recta tangente tiene cierta pendiente m. En este caso resolvemos la ecuación $m = f'(x_0)$, cuya única incógnita es la primera coordenada del punto, x_0, y posteriormente calculamos la segunda y_0.

9.- CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. EXTREMOS RELATIVOS.

También se llama estudio de la monotonía de una función.

- f(x) es **creciente** en un intervalo (a,b) $\Leftrightarrow$ $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$.
- f(x) es **decreciente** en un intervalo (a,b) $\Leftrightarrow$ $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$.
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un **máximo relativo** en el punto $(x_0,f(x_0))$.
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un **mínimo relativo** en el punto $(x_0,f(x_0))$.

Para saber si es máximo o mínimo relativo, también se puede dividir la recta real en intervalos (representando en ella las soluciones de la ecuación $f'(x_0) = 0$) y estudiar el signo de la derivada:

  - Si la función cambia de creciente a decreciente es un **máximo relativo**.
  - Si la función cambia de decreciente a creciente es un **mínimo relativo**.

10.- CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN

También se llama estudio de la curvatura de una función.

- Si $f''(x_0) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$, entonces f es **cóncava** en (a,b).
- Si $f''(x_0) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$, entonces f es **convexa** en (a,b).
- Si $f''(x_0) = 0$ y además $f'''(x_0) \neq 0$, entonces f tiene un **punto de inflexión** en $(x_0,f(x_0))$.

También podemos estudiar el signo de la segunda derivada a ambos lados del candidato a punto de inflexión (soluciones de la ecuación $f''(x_0) = 0$) y si cambia de cóncava a convexa o viceversa, efectivamente se trata de un **punto de inflexión**.

11.- PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Son problemas en los que debemos optimizar (encontrar el máximo o el mínimo) una función que viene descrita a través de un enunciado. La dificultad suele estar en determinar correctamente la función. Normalmente se utilizan una o dos variables. En el caso de dos variables, dividimos el procedimiento en cuatro apartados:

1. Descripción de las variables. Relación entre las variables (fórmula).
2. Función objetivo (a optimizar).
3. Planteamiento y resolución.*
4. Interpretación del resultado.

*(Se forma un "sistema de ecuaciones" con la función f(x, y) y la ecuación que relaciona las variables. Aplicando el método de sustitución se consigue una función, f(x), con una sola variable de la que buscaremos sus máximos o mínimos a través de su derivada)

12.- REGLA DE L´HÔPITAL

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno del punto a.

"Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ y $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$"

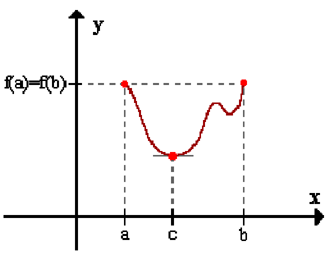
Si al aplicar esta regla volvemos a tener una indeterminación del tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ podemos repetir el proceso.

La regla de L´Hôpital también se aplica para indeterminaciones del tipo $\left(\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$.

Incluso, algunas expresiones del tipo $(\infty-\infty)$ o $\left(1^{\infty}\right)$, se pueden expresar en forma de cociente para poder aplicar esta regla.

13.- TEOREMAS DE DERIVABILIDAD EN INTERVALOS.

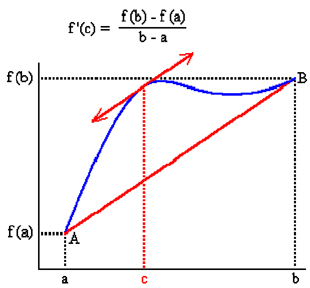
- TEOREMA DE ROLLE.



Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a)=f(b)$ entonces existe al menos un valor $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$. Son puntos de tangente horizontal (máximos o mínimos relativos)

- TEOREMA DEL VALOR MEDIO.

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Es decir, habrá un punto intermedio c en el que la tangente sea paralela a segmento $\overline{AB}$.



14.- ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

- **Asíntotas verticales:** Las asíntotas verticales de una función racional son los valores de x que anulan su denominador. Su ecuación es de la forma $x = k$. Con ayuda de la calculadora se deben estudiar los límites laterales alrededor de k.
  Si se trata de una función logarítmica es preciso analizar el comportamiento de la función en los extremos de su dominio.
- **Asíntotas horizontales:** Las asíntotas horizontales de una función son de la forma
  $$y = \lim_{x \to \pm\infty} f(x).$$
  (Si se trata de una función racional, el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador).
  Si una función tiene asíntotas horizontales, no puede tener asíntotas oblicuas.
- **Asíntotas oblicuas:** Son de la forma $y = m \cdot x + n$ donde
  $$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad y \qquad n = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx\right]$$
  (Si se trata de una función racional, el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, y la mejor forma de calcular la ecuación de la asíntota es dividir numerador entre denominador. La ecuación será y = cociente de la división).

15.- REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Los aspectos más importantes a tener en cuenta son:

- **Dominio** (Dom f): son los valores que puede tomar x
- **Puntos de corte con los ejes:**
  - $x = 0$ Puntos de corte con el eje Y
  - $y = 0$ Puntos de corte con el eje X
- **Asíntotas y ramas infinitas.**
- **Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.**
- **Curvatura. Puntos de inflexión.**

16.- INTEGRALES INMEDIATAS MÁS FRECUENTES.

- $\int a \cdot x^n \, dx = \frac{a \cdot x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int f'(x) \cdot \left[f(x)\right]^n dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int f'(x) \cdot a^{f(x)} dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^{f(x)} + C$
- $\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\left|f(x)\right| + C$
- $\int f'(x) \cdot \operatorname{sen} f(x) dx = -\cos f(x) + C$
- $\int f'(x) \cdot \cos f(x) dx = \operatorname{sen} f(x) + C$
- $\int f'(x) \cdot \left[1 + \operatorname{tg}^2 f(x)\right] dx = \operatorname{tg} f(x) + C$
- $\int \frac{f'(x)}{1 + \left[f(x)\right]^2} dx = \operatorname{arc\,tg} f(x) + C$
- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - \left[f(x)\right]^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} f(x) + C$
- $\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - \left[f(x)\right]^2}} dx = \operatorname{arc\,cos} f(x) + C$

17.- MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

- Integración por partes:
  Se aplica la fórmula

$$\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}$$

  y se suele utilizar con funciones producto de una potencia de x por una función logarítmica, trigonométrica o exponencial. También se utiliza este método para integrar la función logaritmo o la función arcotangente.

- Integración mediante cambio de variable:

  Se define el cambio de variable $z = f(x)$; se calcula $dz = f'(x)dx \Rightarrow dx = \dfrac{dz}{f'(x)}$;

  se sustituye en la integral para conseguir otra que sea inmediata, y finalmente se deshace el cambio de variable.

- Integración de funciones racionales:
  Si el numerador es mayor o igual que el denominador, se hace la división y se aplica la regla de comprobación de la división:

$$\frac{D(x)}{d(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

  Después se integran ambos miembros:

$$\int \frac{D(x)}{d(x)}dx = \int \left[c(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \right] dx = \int c(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{d(x)}dx$$

  - Si el divisor tiene n raíces simples, la última integral se descompone de la siguiente forma:

$$\int \frac{r(x)}{d(x)}dx = \int \left(\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n} \right) dx$$

  - Si el divisor tiene n raíces múltiples, la última integral se descompone de la siguiente manera:

$$\int \frac{r(x)}{d(x)}dx = \int \left(\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} \right) dx$$

  En ambos casos se obtienen integrales inmediatas.

18.- INTEGRAL DEFINIDA. REGLA DE BARROW

Si F(x) es una **primitiva** de f, para calcular la integral definida se aplica la regla de Barrow:

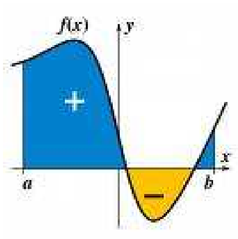
$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

19.- CÁLCULO DE ÁREAS.

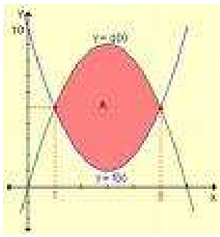
- El área que encierra una curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_2}^{b} f(x)\,dx\right|,$$

siendo x_1 y x_2 los puntos de corte de la función con el eje X en el intervalo $[a,b]$.



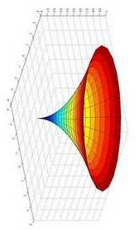
- Para calcular el área entre dos curvas se plantea la integral de la diferencia de ambas (en valor absoluto), y se toman como límites de integración los puntos de intersección entre ellas (soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$).



20.- CÁLCULO DE VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN.

- El volumen del cuerpo de revolución que engendra la función $y = f(x)$, considerada en el intervalo $[a,b]$, al girar sobre el eje X es

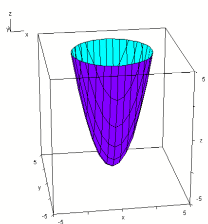
$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x)\right]^2\,dx}$$



- El volumen del cuerpo de revolución que engendra la función $y = f(x)$, considerada en el intervalo $[a,b]$, al girar sobre el eje Y es

$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b \left[g(y)\right]^2\,dy}$$

donde $g(y)$ se consigue despejando x en la expresión $y = f(x)$, es decir, $x = g(y)$.



ANÁLISIS

1. Límite de una función en un punto. Límites laterales. Cálculo de límites. Indeterminaciones sencillas. Infinitésimos equivalentes.
2. Funciones continuas. Operaciones algebraicas con funciones continuas. Composición de funciones continuas. Teorema de los valores intermedios. Teorema de acotación en intervalos cerrados y acotados. Tipos de discontinuidad.
3. Derivada de una función en un punto. Interpretaciones (analítica, geométrica, física). Derivadas laterales. Relación con la continuidad. Reglas de derivación (incluyendo la regla de la cadena, la derivación logarítmica, y las fórmulas de las derivadas de las funciones arcoseno y arcotangente). Derivadas iteradas.
4. Aplicaciones de la derivada. Monotonía y convexidad. Determinación de los puntos notables de funciones. Representación gráfica.
5. Planteamiento y resolución de problemas de máximos y de mínimos.
6. Conocimiento y aplicación de los resultados del Teorema de Rolle, el Teorema del Valor Medio y la regla de L´Hôpital.
7. Primitiva de una función. Cálculo de primitivas inmediatas y de funciones que son derivadas de una función compuesta. Integración por partes. Integración mediante cambio de variables (ejemplos simples). Integración de funciones racionales (con denominador de grado no mayor que dos).
8. El problema del área. Introducción al concepto de integral definida de una función a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. La regla de Barrow. La integral definida como suma de elementos diferenciales: Aplicaciones al cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución.