PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2012

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x\cdot(x-2)$.
a) Calcula las asíntotas de f.
b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y los valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
c) Determina, si existen, los puntos de inflexión de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: No tiene, ya que el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty} e^x(x-2)=\infty \Rightarrow$ No tiene.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x(x-2)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow y=0$$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene horizontal

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=e^x+(x-2)e^x=e^x(x-1)=0\Rightarrow x=1$$

	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
Signo f'	–	+
Función	D	C

$\downarrow$

mínimo $(1,-e)$

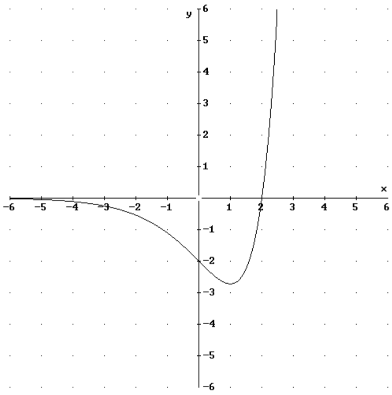
c) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=e^x(x-1)+e^x=e^x\cdot x=0\Rightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
Signo f''	–	+
Función	Cn	Cx

$\downarrow$

P.I. $(0,-2)$

El dibujo de la función sería:



Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{a\cdot sen\,x - x\cdot e^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de *a* y el de dicho limite.

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\cdot sen\,x - x\cdot e^x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cdot \cos x - e^x + x\cdot e^x}{2x} = \frac{a-1}{0}$$

Como el limite es finito, se tiene que cumplir que: $a-1=0 \Rightarrow a=1$, para que vuelva a salir $\frac{0}{0}$ y podamos seguir aplicando L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1\cdot sen\,x - x\cdot e^x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot \cos x - e^x - x\cdot e^x}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-sen\,x - e^x - e^x - x\cdot e^x}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Sea la función $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a) Halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo $\left[\frac{1}{e},e\right]$.
b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=e$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Los extremos absolutos pueden estar en:

- Las soluciones de $f'(x)=0$. Calculamos la derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}=0\Rightarrow x=1\Rightarrow y=1$$

- En los puntos donde no es continua o no es derivable. En nuestro caso como es continua y derivable, no hay ningún punto.

- En los extremos del intervalo $\left[\frac{1}{e},e\right]$. Calculamos los valores de la función en los extremos del intervalo.

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=e-1 \quad ; \quad f(e)=\frac{1}{e}+1$$

Luego, el máximo absoluto está en $\left(\frac{1}{e},e-1\right)$ y el mínimo absoluto en $(1,1)$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=e$ es:

$$y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)$$

Calculamos: $f(e)=\frac{1}{e}+\ln e=\frac{1}{e}+1$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\Rightarrow f'(e)=-\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e^2}$$

Sustituyendo, tenemos: $y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)\Rightarrow y-\frac{1}{e}-1=\frac{e-1}{e^2}(x-e)$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 2$
a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*
c) Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de *f* donde ésta corta a la asíntota horizontal.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: Son los valores que anulan al denominador, es decir, $x=-1$ y $x=2$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-x-2}=\dfrac{\infty}{\infty}=\dfrac{2}{1}=2\Rightarrow y=2$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene horizontal

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{4x\cdot(x^2-x-2)-(2x-1)\cdot 2x^2}{(x^2-x-2)^2}=\frac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=-4$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo f'	–	+	+	–	–
Función	D	C	C	D	D

Creciente: $(-4,-1)\cup(-1,0)$

Decreciente: $(-\infty,-4)\cup(0,2)\cup(2,\infty)$

c) Calculamos si existe punto de corte de la función con la asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{2x^2}{x^2-x-2} \\ y=2 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2x^2}{x^2-x-2}=2\Rightarrow 2x+4=0\Rightarrow x=-2$$

Luego, el punto de corte es el $(-2,2)$

Sea la función $f:[1,e]\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=x^2-8\ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
b) Calcula los extremos absolutos y relativos de la función *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) Estudia los intervalos de concavidad y convexidad.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a y b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=2x-\frac{8}{x}=0\Rightarrow x=2\ ;\ x=-2$$

	$(1,2)$	$(2,e)$
Signo y'	$-$	$+$
Función	D	C

$\downarrow$

mínimo $(2,4-8\ln 2)$

La función tiene un mínimo relativo en $(2,-1'54)$.
Los extremos absolutos pueden estar en los extremos del intervalo, es decir, en $x=1$ y $x=e$.
Calculamos los valores de la función en estos puntos.

$$f(1)=1$$
$$f(e)=e^2-8\ln e=-0'61$$

Luego, el máximo absoluto está en el punto $(1,1)$ y el mínimo absoluto en el punto $(2,-1'54)$

c) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$y''=2+\frac{8}{x^2}=0\Rightarrow \text{ No tiene solución}$$

	$(1,e)$
Signo y''	$+$
Función	Cx

Luego, la función es convexa en el intervalo $(1,e)$.

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=e^x(x^2-x+1)$.
a) Calcula: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
b) Halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y los valores que se alcanzan, determinando si son máximos o mínimos).
c) Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-x+1)=0\cdot\infty=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1}{e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{-e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\frac{2}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x(x^2-x+1)=\infty$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=e^x(x^2-x+1)+(2x-1)\cdot e^x=e^x\left(x^2+x\right)=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C

Máximo $\left(-1,\frac{3}{e}\right)$ mínimo $(0,1)$

c) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$y''=e^x(x^2+x)+(2x+1)\cdot e^x=e^x\left(x^2+3x+1\right)=0\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

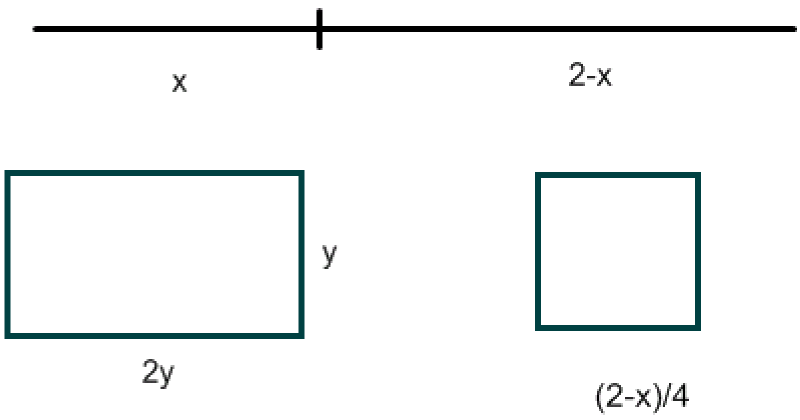
	$\left(-\infty,\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$
Signo y''	+	–	+
Función	Cx	Cn	Cx

P.I. P.I.

Luego, en los puntos $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, hay puntos de inflexión, ya que cambia la curvatura.

Un alambre de longitud 2 metros se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de la altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Calcula las longitudes de dichos trozos para que la suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado resultante sea mínima.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínima: $S_{\min} = \left(\frac{2-x}{4}\right)^2 + 2y^2$

b) Relación entre las variables: $x = 2y + 2y + y + y = 6y \Rightarrow y = \frac{x}{6}$

c) Expresamos la función que queremos que sea mínima con una sola variable.

$$S_{\min} = \left(\frac{2-x}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{6}\right)^2 = \frac{17x^2 - 36x + 36}{144}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{34x - 36}{144} = 0 \Rightarrow x = \frac{36}{34} = \frac{18}{17}$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo

$$S'' = \frac{36}{144} > 0 \Rightarrow mínimo$$

Luego, las dimensiones son: $x = \frac{18}{17} m$; $2 - x = \frac{16}{17} m$

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\ln(x^2+3x+3)-x$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-2$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}-1=\frac{-x^2-x}{x^2+3x+3}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
Signo y'	$-$	$+$	$-$
Función	D	C	D

$\downarrow$ $\downarrow$

mínimo $(-1,1)$ Máximo $(0,\ln 3)$

b) La recta normal en $x=-2$ es $y-f(-2)=-\dfrac{1}{f'(-2)}\cdot(x+2)$

$$f(-2)=2$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-x}{x^2+3x+3}\Rightarrow f'(-2)=\frac{-4+2}{4-6+3}=-2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-2=\dfrac{1}{2}\cdot(x+2)\Rightarrow y=\dfrac{x+6}{2}$

Se considera la función derivable $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{a}{x-2} & si \quad x<1 \\ a+\dfrac{b}{\sqrt{x}} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

Calcula los valores de *a* y *b*.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable, primero tiene que ser continua en el punto $x=1$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\rightarrow 1^-} 1+\dfrac{a}{x-2}=1-a \\ \lim\limits_{x\rightarrow 1^+} a+\dfrac{b}{\sqrt{x}}=a+b \end{array}\right\} \Rightarrow 1-a=a+b \Rightarrow 2a+b=1$$

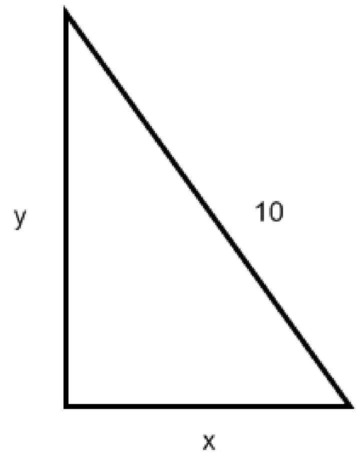
Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{a}{(x-2)^2} & si \quad x<1 \\ -\dfrac{b}{2x\sqrt{x}} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

Como es derivable en $x=1$, se cumple que: $\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=-\dfrac{a}{1}=-a \\ f'(1^+)=-\dfrac{b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -a=-\dfrac{b}{2} \Rightarrow b=2a$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $a=\dfrac{1}{4}$; $b=\dfrac{1}{2}$

De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 unidades, determina las dimensiones del de área máxima.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = \dfrac{x \cdot y}{2}$

b) Relación entre las variables: $x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x\sqrt{100 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{100x^2 - x^4}}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\max} = \frac{\dfrac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}}}{2} = \frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{50}$$

e) Comprobamos que corresponde a un máximo

$$S'' = \frac{-2x\sqrt{100 - x^2} - \dfrac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}}{100 - x^2} = \frac{-2x\sqrt{100 - x^2} + \dfrac{x}{\sqrt{100 - x^2}}}{100 - x^2}$$

$$S''(x = \sqrt{50}) = \frac{-2\sqrt{50}\sqrt{100 - 50} + \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{100 - 50}}}{100 - 50} = \frac{-100 + 1}{50} < 0 \Rightarrow Máximo$$

Luego, las dimensiones son: $x = \sqrt{50}$; $y = \sqrt{50}$

Sea la función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x+k & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & si \quad x>0 \end{cases}$.

a) Calcula el valor de *k*.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=1$.

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como la función es continua se cumple que los límites laterales en $x=0$ son iguales, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} x+k=k \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x\cdot e^{x^2}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x^2}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow k=1$$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$$

Calculamos: $f(1)=\dfrac{e^1-1}{1}=e-1$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot e^{x^2}\cdot x^2-2x\cdot(e^{x^2}-1)}{x^4}=\frac{2\cdot e^{x^2}\cdot x^2-2\cdot(e^{x^2}-1)}{x^3}\Rightarrow f'(1)=2e-2e+2=2$$

Sustituyendo, tenemos:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-(e-1)=2(x-1)\Rightarrow y=2x-2+e-1=2x+e-3$$

Sea la función f definida por $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$ para $x\neq 1$.
a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función *f*.
b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y los valores que alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: Son los valores que anulan al denominador, es decir, $x=1$.

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}}{1-x}=\dfrac{0}{\infty}=0\Rightarrow y=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{1-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1\cdot e^{-x}}{-1}=\infty\Rightarrow NO$$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene horizontal

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{-1\cdot e^{-x}(1-x)-(-1)\cdot e^{-x}}{(1-x)^2}=\frac{x\cdot e^{-x}}{(1-x)^2}=0\Rightarrow x=0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo f'	$-$	$+$	$+$
Función	D	C	C

Creciente: $(0,1)\cup(1,\infty)$

Decreciente: $(-\infty,0)$

Mínimo: $(0,1)$