PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2013

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos(x)+b\,sen(x)}{x^3}$ es finito, calcula *b* y el valor del límite.

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+b\,sen\,x}{x^3}=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+b\,sen\,x}{x^3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\,sen\,x+b\cos x}{3x^2}=\frac{1+b}{0}$$

Como dice que es finito, entonces, $1+b=0\Rightarrow b=-1$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\,sen\,x-\cos x}{3x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\,x-sen\,x-x\cos x+sen\,x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\,x-x\cos x}{6x}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos-\cos x+xsen\,x}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

Sea $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & si \quad x\le 0 \\ a\sqrt{b-x} & si \quad 0<x<1 \end{cases}$

a) Determina *a* y *b* sabiendo que *f* es derivable en todo su dominio.

b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable, primero tiene que ser continua en el punto $x=0$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} x+2e^{-x}=2 \\ \lim_{x\to 0^+} a\sqrt{b-x}=a\sqrt{b} \end{array}\right\} \Rightarrow 2=a\sqrt{b}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 1-2e^{-x} & si \quad x\le 0 \\ -\dfrac{a}{2\sqrt{b-x}} & si \quad 0<x<1 \end{cases}$

Como es derivable en $x=0$, se cumple que: $\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-1 \\ f'(0^+)=-\dfrac{a}{2\sqrt{b}} \end{array}\right\} \Rightarrow -1=-\dfrac{a}{2\sqrt{b}} \Rightarrow 2\sqrt{b}=a$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $a=2$; $b=1$

b) La recta tangente en $x=0$, es: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$.

- $f(0)=2$
- $f'(x)=1-2e^{-x} \Rightarrow f'(0)=1-2=-1$

Sustituyendo, tenemos: $y-2=-1\cdot(x-0)\Rightarrow y=-x+2$

La recta normal en $x=0$ es $y-f(0)=-\dfrac{1}{f'(0)}\cdot(x-0)$

Sustituyendo, tenemos: $y-2=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x+2$

Sea g la función definida por $g(x)=\dfrac{mx^3}{(x-n)^2}$ para $x\neq n$.
a) Halla m y n sabiendo que la recta $y=2x-4$ es una asíntota de la gráfica de g.
b) Determina si la gráfica de g es simétrica respecto al origen.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta $y=2x-4$ es la asíntota oblicua de la función, luego:

$$2=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{mx^3}{x^2+n^2-2nx}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{mx^3}{x^3+n^2x-2nx^2}=\frac{\infty}{\infty}=m\Rightarrow m=2$$

$$-4=\lim_{x\to\infty}\left[g(x)-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^3}{x^2+n^2-2nx}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x^3-2n^2x+4nx^2}{x^2+n^2-2nx}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2n^2x+4nx^2}{x^2+n^2-2nx}=\frac{\infty}{\infty}=4n\Rightarrow n=-1$$

b) La gráfica es simétrica respecto al origen si se cumple que: $g(x)=g(-x)$.

$$g(x)=\frac{2x^3}{(x+1)^2}$$

$$g(-x)=\frac{2(-x)^3}{(-x+1)^2}=-\frac{2\,x^3}{(-x+1)^2}\neq g(x)\Rightarrow$$ No es simétrica respecto al origen.

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de *f* tiene de abscisa $x=1$ y que *f* tiene un mínimo relativo en $x=2$ de valor -9. Calcula *a, b* y *c*.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Nos dan la función: $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \ ; \ f''(x)=6x+2a$$

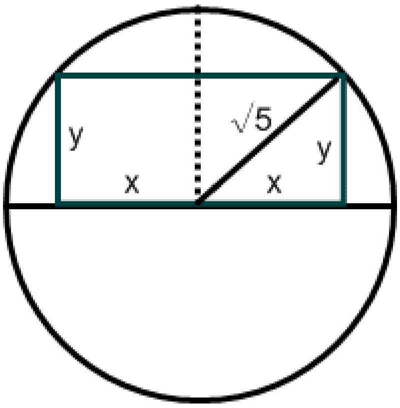
- Punto de inflexión en $x=1\Rightarrow f''(1)=0\Rightarrow 6\cdot 1+2a=0\Rightarrow a=-3$

- Mínimo relativo en $(2,-9)\Rightarrow \begin{cases} Pasa\ por\ (2,-9)\Rightarrow 8-12+c=-9\Rightarrow c=-5 \\ f'(2)=0\Rightarrow 3\cdot 4-12+b=0\Rightarrow b=0 \end{cases}$

Los valores son: $a=-3$; $b=0$; $c=-5\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2-5$

Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}$ cm. de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máxima: $P_{\max} = 4x + 2y$

b) Relación entre las variables: $5 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{5 - x^2}$

$$P_{\max} = 4x + 2y = 4x + 2\sqrt{5 - x^2}$$

c) Derivamos e igualamos a cero:

$$P'_{\max} = 4 + 2\frac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

d) Comprobamos que corresponde a un máximo

$$P''_{\max} = \frac{-2\sqrt{5 - x^2} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{5 - x^2}}}{5 - x^2} \Rightarrow P''_{\max}(x = 2) = -10 < 0 \text{ corresponde a un máximo}$$

Luego, las dimensiones del rectángulo son base $= 2x = 4\,cm$; altura $= y = 1\,cm$

Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determina a, b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y+x=-3$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \ ; \ f''(x)=6x+2a$$

- Punto de inflexión en $x=1 \Rightarrow f''(1)=0 \Rightarrow 6\cdot 1+2a=0 \Rightarrow a=-3$

- f y la normal pasan por $x=0 \Rightarrow f(0)=y(0)=-3 \Rightarrow c=-3$.

- La pendiente de la recta normal es $-1=-\dfrac{1}{f'(0)} \Rightarrow b=1$

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$ para $x>0, x\neq 1$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.
b) Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=e$.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{0}=\infty \Rightarrow \text{ Asíntota vertical } x=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\infty \Rightarrow \text{No tiene asíntota Horizontal}$$

Asíntota oblicua: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\ln x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow \text{ No tiene asíntota oblicua}$$

b) Calculamos : $f(e)=\dfrac{e}{\ln e}=e$

$$f'(x)=\frac{1\cdot \ln x - x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}\Rightarrow f'(e)=\frac{\ln e-1}{(\ln e)^2}=0$$

Luego, la recta tangente es: $y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)\Rightarrow y-e=0\cdot(x-e)\Rightarrow y=e$

La ecuación de la normal es: $y-f(e)=-\dfrac{1}{f'(e)}\cdot(x-e)\Rightarrow y-e=-\dfrac{1}{0}\cdot(x-e)\Rightarrow x=e$

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para $x\neq a$ y $x\neq\dfrac{1}{2}$.

a) Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(0,2)$ y que la recta $x=2$ es una asíntota de dicha gráfica.

b) Para $k=4$ y $a=2$, halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

- Pasa por $(0,2)\Rightarrow 2=\dfrac{k}{(0-a)(0-1)}=\dfrac{k}{a}\Rightarrow k=2a$
- $x=2$ es una asíntota vertical, que son los valores que anulan al denominador, luego $a=2$

Por lo tanto, $a=2$ y $k=4$

b) La función es: $f(x)=\dfrac{4}{(x-2)(2x-1)}=\dfrac{4}{2x^2-5x+2}$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=\frac{-4(4x-5)}{(2x^2-5x+2)^2}=0\Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

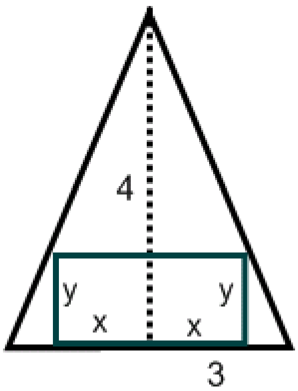
	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{5}{4},2\right)$	$(2,\infty)$
Signo f'	+	+	–	–
Función	C	C	D	D

$\downarrow$

máximo $\left(\dfrac{5}{4},-\dfrac{32}{9}\right)$

Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máxima: $S_{\max} = 2xy$

b) Relación entre las variables: $\dfrac{4-y}{x} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow 12-3y = 4x \Rightarrow y = \dfrac{12-4x}{3}$

$$S_{\max} = 2xy = 2x\frac{12-4x}{3} = \frac{24x-8x^2}{3}$$

c) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{\max} = \frac{24-16x}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

d) Comprobamos que corresponde a un máximo

$S''_{\max} = \dfrac{-16}{3} < 0 \Rightarrow$ corresponde a un máximo independientemente del valor de x

Luego, las dimensiones del rectángulo son base $= 2x = 3\,m$; altura $= y = 2\,m$

Sea *f* la función definida por $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ para $x\geq -1, x\neq 0$
a) Calcula los límites laterales de *f* en $x=0$.
b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty$

$\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}}=0$

b)

Asíntota vertical: $x=0$

$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty\Rightarrow$ Asíntota vertical para $x\to 0^+$

$\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}}=0\Rightarrow$ No tiene asíntota vertical para $x\to 0^-$

Asíntota horizontal: No tiene

$\lim_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}}=\infty\cdot 1=\infty\Rightarrow$ No tiene asíntota Horizontal para $x\to +\infty$

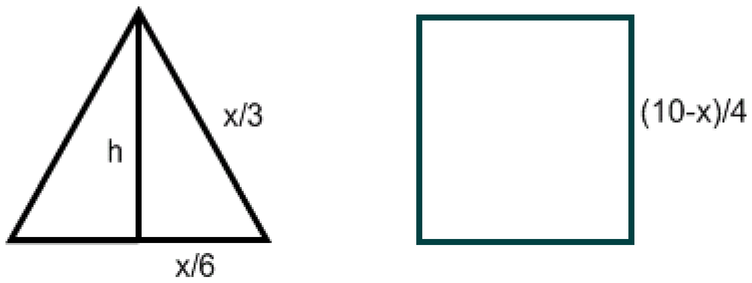
$\lim_{x\to -\infty} xe^{\frac{1}{x}}=-\infty\cdot 1=-\infty\Rightarrow$ No tiene asíntota Horizontal para $x\to -\infty$

Asíntota oblicua: $y=x+1$

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

$n=\lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\infty\cdot 0=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$

Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.



Calculamos el valor de la altura del triángulo equilátero aplicando Pitágoras:

$$h=\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{36}}=\sqrt{\frac{3x^2}{36}}=\frac{x\sqrt{3}}{6}$$

a) Función que queremos que sea mínima:

$$S_{\min}=\frac{\frac{x}{3}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{6}}{2}+\left(\frac{10-x}{4}\right)^2=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}+\frac{100+x^2-20x}{16}=\frac{\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-180x+900}{144}$$

b) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{\min}=\frac{2\left(9+4\sqrt{3}\right)x-180}{144}=\frac{\left(9+4\sqrt{3}\right)x-90}{72}=0\Rightarrow x=\frac{90}{\left(9+4\sqrt{3}\right)}=5'65$$

Luego, las dimensiones de los trozos son: $x=5'65\,m$; $10-x=4'35\ m$

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función f definida por $f(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x^2}$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\cdot 2\ln x}{x^4}=\frac{2x(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{2(1-2\ln x)}{x^3}=0\Rightarrow \ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}$$

	$\left(0,e^{\frac{1}{2}}\right)$	$\left(e^{\frac{1}{2}},\infty\right)$
Signo f'	+	–
Función	C	D

Creciente: $\left(0,e^{\frac{1}{2}}\right)$

Decreciente: $\left(e^{\frac{1}{2}},\infty\right)$

Máximo: $\left(e^{\frac{1}{2}},\frac{1}{e}\right)$

b) Asíntota vertical: Son los valores que anulan al denominador, es decir, $x=0$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x^2}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2\cdot\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0\Rightarrow y=0$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene horizontal