

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

$$\text{Sea } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

- a) Determina los valores de m para que los vectores fila de M son linealmente independientes.
 b) Estudia el rango de M según los valores de m .
 c) Para $m = 1$, calcula la inversa de M .

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el determinante de la matriz M :

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 + m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = -1$$

Para todos los valores de $m \neq 0$ y -1 , el determinante es distinto de cero y los vectores son linealmente independientes.

- b) Calculamos el rango de M según los valores de m .

| | Rango(M) |
|-------------------|----------|
| $m = 0$ | 2 |
| $m = -1$ | 2 |
| $m \neq 0$ y -1 | 3 |

- c) Calculamos la inversa de M para $m = 1$:

$$(M)^{-1} = \frac{(M^d)^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $A^2 = 2I$ y calcula A^{-1} .

b) Calcula A^{2013} y su inversa.

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Comprobamos que $A^2 = 2I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

Calculamos la inversa:

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

También la podemos calcular de la siguiente forma:

$$A^2 = 2I \Rightarrow A \cdot A = 2I \Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{2}A\right) = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$A^{2013} = A^{2012} \cdot A = (A^2)^{1006} \cdot A = (2I)^{1006} \cdot A = 2^{1006} \cdot (I)^{1006} \cdot A = 2^{1006} \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A^{2013})^{-1} &= A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots (2013 \text{ veces}) \cdots A^{-1} \cdot A^{-1} = \\ &= \frac{1}{2}A \cdot \frac{1}{2}A \cdots (2013 \text{ veces}) \cdots \frac{1}{2}A \cdot \frac{1}{2}A = \\ &= \frac{1}{2^{2013}}A^{2013} = \frac{1}{2^{2013}} \cdot 2^{1006} \cdot A = \frac{1}{2^{1007}} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1007}} & \frac{1}{2^{1007}} \\ \frac{1}{2^{1007}} & -\frac{1}{2^{1007}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

a) Halla A^{-1} .

b) Calcula la matriz X que satisface $A \cdot X = B^t \cdot C$ (B^t es la traspuesta de B).

c) Halla el determinante de $A^{2013} \cdot B^t \cdot B \cdot (A^{-1})^{2013}$.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la inversa:

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^t}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot X = B^t \cdot C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C$

Calculamos la matriz X

$$X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Calculamos

$$|B^t \cdot B| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = 8 - 4 - 4 = 0$$

Luego:

$$|A^{2013} \cdot B^t \cdot B \cdot (A^{-1})^{2013}| = |A|^{2013} \cdot |B^t \cdot B| \cdot \left| \frac{1}{|A|} \right|^{2013} = |B^t \cdot B| = 0$$

Sabiendo que el determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes

determinantes, indicando en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$

b) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = (-8) \cdot 4 = -32$

Por otro lado, sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en

nuestro caso será: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$

b) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & -b & c \\ d & -e & f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 = -8$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”.

$$\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 = -12$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo”.

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula X e Y tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$ (A^t es la matriz traspuesta de A).

b) Calcula Z tal que $AZ = BZ + A$.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Planteamos el sistema matricial

$$\left. \begin{aligned} X - Y &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X - Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Si cambiamos la primera ecuación de signo y sumamos, tenemos que: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y

sustituyendo en la primera ecuación tenemos que: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $AZ = BZ + A \Rightarrow (A - B)Z = A \Rightarrow Z = (A - B)^{-1} \cdot A$

Calculamos $(A - B) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su inversa: $(A - B)^{-1} = \frac{[(A - B)^d]^t}{|A - B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^t}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Luego, $Z = (A - B)^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Sean A y B las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$

a) Calcula las matrices X e Y para las que $2X - Y = A$ y $X - 3Y = B$.

b) Halla la matriz Z que verifica $B^2 + ZA + B^t = 3I$ (I denota la matriz identidad y B^t la matriz traspuesta de B).

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Planteamos el sistema matricial

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Si multiplicamos la segunda ecuación por -2 y sumamos, tenemos que:

$$5Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en la segunda ecuación tenemos que: $X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $B^2 + ZA + B^t = 3I \Rightarrow ZA = 3I - B^2 - B^t \Rightarrow Z = (3I - B^2 - B^t) \cdot A^{-1}$

Calculamos $(3I - B^2 - B^t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix}$

Calculamos su inversa: $A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t}{1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Luego, $Z = (3I - B^2 - B^t) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -76 & -39 \\ 101 & 48 \end{pmatrix}$

Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es $\det(M) = 2$. Calcula:

a) El rango de M^3 .

b) El determinante de $2M^t$ (M^t es la matriz traspuesta de M).

c) El determinante de $(M^{-1})^2$.

d) El determinante de N , donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $|M^3| = |M \cdot M \cdot M| = |M| \cdot |M| \cdot |M| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 0 \Rightarrow$ El rango es 3

b) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como M es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2M^t| = |2M| = (2)^3 \cdot |M| = (8) \cdot 2 = 16$

c) Sabemos que: $M \cdot M^{-1} = I \Rightarrow |M \cdot M^{-1}| = |M| \cdot |M^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |M^{-1}| = \frac{1}{|M|}$; luego en nuestro

caso será: $|M^{-1}|^2 = \frac{1}{|M|^2} = \frac{1}{4}$

d) Si en un determinante cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo, luego, el determinante de N vale -2

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Halla, si es posible, A^{-1} y B^{-1} .

b) Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$, A^t la matriz traspuesta de A .

c) Calcula la matriz X que satisface $A \cdot X - B = AB$.

MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz inversa de A .

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matriz B no tiene inversa, ya que su determinante vale 0.

$$b) |AB^{2013}A^t| = |A| \cdot |B^{2013}| \cdot |A^t| = 2 \cdot 0^{2013} \cdot 2 = 0$$

c) Resolvemos la ecuación matricial.

$$A \cdot X = B + AB \Rightarrow X = A^{-1}(B + AB) = A^{-1}B + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$