

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi/5} \int_0^a \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}} dr d\phi \\
 &= a \int_0^{2\pi/5} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} dr d\phi \\
 &= a \int_0^{2\pi/5} [-\sqrt{a^2-r^2}]_0^a d\phi \\
 &= a \int_0^{2\pi/5} [(-\sqrt{a^2-a^2}) - (-\sqrt{a^2-0})] d\phi \\
 &= a \int_0^{2\pi/5} [\sqrt{a^2}] d\phi = a \int_0^{2\pi/5} a d\phi \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi/5} d\phi = a^2 \frac{2\pi}{5}
 \end{aligned}$$

## Reglas de Integración y Ejercicios

# Integrales

## Tabla de integrales inmediatas

### Gja d'Yg

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

### 7ca di YghUg

$$\int f(x)^p f'(x) dx = \frac{f(x)^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + C$$

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\cot f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \arctan f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx = \arcsin f(x) + C$$

$$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arccos f(x) + C$$

$$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int f'(x) a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$$

## Ejercicios de integrales indefinidas

1. Calcular la integral  $\int x^5 dx$ .

**Solución.-**  $\frac{x^6}{6} + C$ .

2. Calcular la integral  $\int (x + \sqrt{x}) dx$ .

**Solución.-**  $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$ .

3. Calcular la integral  $\int \left( \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$ .

**Solución.-**  $6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x} + C$ .

4. Calcular la integral  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$ .

5. Calcular la integral  $\int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C$ .

6. Calcular la integral  $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$ .

7. Calcular la integral  $\int e^{5x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{5}e^{5x} + C$ .

8. Calcular la integral  $\int \cos 5x dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\sin 5x}{5} + C$ .

9. Calcular la integral  $\int \sin ax dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{\cos ax}{a} + C$ .

10. Calcular la integral  $\int \frac{\ln x}{x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$ .

11. Calcular la integral  $\int \frac{1}{\sin^2 3x} dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{\cot 3x}{3} + C$ .

12. Calcular la integral  $\int \frac{1}{\cos^2 7x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\tan 7x}{7} + C$ .

13. Calcular la integral  $\int \frac{1}{3x-7} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{3} \ln |3x-7| + C$ .

14. Calcular la integral  $\int \frac{1}{1-x} dx$ .

**Solución.-**  $-\ln |1-x| + C$ .

15. Calcular la integral  $\int \frac{1}{5-2x} dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{1}{2} \ln |5-2x| + C$ .

16. Calcular la integral  $\int \tan 2x dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$ .

17. Calcular la integral  $\int \sin^2 x \cos x dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\sin^3 x}{3} + C$ .

18. Calcular la integral  $\int \cos^3 x \sin x dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$ .

19. Calcular la integral  $\int x\sqrt{x^2+1} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + C$ .

20. Calcular la integral  $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2} \sqrt{2x^2+3} + C$ .

21. Calcular la integral  $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{\sin x} + C$ .

22. Calcular la integral  $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2 \cos^2 x} + C$ .

23. Calcular la integral  $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\tan^2 x}{2} + C$ .

24. Calcular la integral  $\int \frac{\cot x}{\sin^2 x} dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{\cot^2 x}{2} + C$ .

25. Calcular la integral  $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\ln^2(x+1)}{2} + C$ .

26. Calcular la integral  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x + 1}} dx$ .

**Solución.-**  $\sqrt{2 \sin x + 1} + C$ .

27. Calcular la integral  $\int \frac{\sin 2x}{(1 + \cos 2x)^2} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2(1 + \cos 2x)} + C$ .

28. Calcular la integral  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$ .

**Solución.-**  $2\sqrt{1 + \sin^2 x} + C$ .

29. Calcular la integral  $\int \frac{\sqrt{\tan x + 1}}{\cos^2 x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{2}{3} \sqrt{(\tan x + 1)^3} + C$ .

30. Calcular la integral  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\ln^3 x}{3} + C$ .

31. Calcular la integral  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\arcsin^2 x}{2} + C$ .

32. Calcular la integral  $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$ .

33. Calcular la integral  $\int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) + C$ .

34. Calcular la integral  $\int e^{2x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2} e^{2x} + C$ .

35. Calcular la integral  $\int e^{\frac{x}{2}} dx$ .

**Solución.-**  $2e^{\frac{x}{2}} + C$ .

36. Calcular la integral  $\int e^{\sin x} \cos x dx$ .

**Solución.-**  $e^{\sin x} + C$ .

37. Calcular la integral  $\int 3^x e^x dx$ .

**Solución.-**  $\frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C$ .

38. Calcular la integral  $\int e^{-3x} dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{1}{3} e^{-3x} + C$ .

39. Calcular la integral  $\int e^{x^2+4x+3} (x+2) dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2} e^{x^2+4x+3} + C$ .

40. Calcular la integral  $\int \frac{1}{1+2x^2} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x) + C$ .

41. Calcular la integral  $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3}x) + C$ .

42. Calcular la integral  $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$ .

**Solución.-**  $\arcsin \frac{x}{3} + C$ .

43. Calcular la integral  $\int \frac{1}{4+x^2} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$ .

## Integración por partes

Recordemos la fórmula de la deriva del producto de funciones

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

que expresada bajo forma de diferencial da lugar a

$$d[u(x)v(x)] = d[u(x)]v(x) + u(x)d[v(x)].$$

De donde se obtiene,

$$u(x)d[v(x)] = d[u(x)v(x)] - v(x)d[u(x)].$$

Integrando ahora ambos miembros tendremos

$$\int u(x)d[v(x)] = u(x)v(x) - \int v(x)d[u(x)],$$

que se escribe también en forma abreviada,

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

Esta expresión es conocida como la *fórmula de la integración por partes* y es de gran utilidad para la resolución de integrales. Se aplica a la resolución de las integrales  $\int u dv$  a partir de la integral  $\int v du$  que se supone más sencilla. La aplicación de (1) exige primero identificar adecuadamente en el integrando las funciones  $u(x)$  y  $v(x)$ . Veamos un ejemplo

**Ejemplo 1** Si queremos calcular la integral

$$\int x^3 \ln x dx,$$

observemos que la integral de  $x^3$  es inmediata y que la derivada de  $\ln x$  es también muy sencilla. Así, si asignamos

$$u = \ln x \quad y \quad dv = x^3 dx,$$

tendremos

$$du = \frac{dx}{x} \quad y \quad v = \frac{x^4}{4} + C_1,$$

si integramos ahora

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x dx &= \int \ln x \left[ d \left( \frac{x^4}{4} + C_1 \right) \right] \\ &= \left( \frac{x^4}{4} + C_1 \right) \ln x - \int \left( \frac{x^4}{4} + C_1 \right) \frac{dx}{x} \\ &= \left( \frac{x^4}{4} + C_1 \right) \ln x - \int \left( \frac{x^3}{4} + \frac{C_1}{x} \right) dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C. \end{aligned}$$

Observemos que la primera constante de integración  $C_1$  se cancela de la respuesta final ( $C_1 \ln x - C_1 \ln x$ ). Este es siempre el caso cuando integramos por partes, por ello, en la práctica, nunca incluimos una constante de integración en  $v(x)$ , simplemente tomaremos para  $v(x)$  cualquier primitiva de  $dv(x)$ .

## Algunos tipos de integrales que se resuelven por partes

|   |   |
|---|---|
| $\int x^n e^x dx$ $u = x^n$ $dv = e^x dx$       | $\int x^n \sin x dx$ $u = x^n$ $dv = \sin x dx$ |
| $\int x^n \cos x dx$ $u = x^n$ $dv = \cos x dx$ | $\int x^n \ln x dx$ $u = \ln x$ $dv = x^n dx$   |
| $\int \arctan x dx$ $u = \arctan x$ $dv = dx$   | $\int \arcsin x dx$ $u = \arcsin x$ $dv = dx$   |
| $\int \ln x dx$ $u = \ln x$ $dv = dx$           |   |

## Ejercicios de integración por partes

1. Calcular la integral  $\int x e^x dx$ .

**Solución.-**  $x e^x - e^x + C$ .

2. Calcular la integral  $\int \ln x dx$ .

**Solución.-**  $x \ln x - x + C$ .

3. Calcular la integral  $\int x^2 e^{3x} dx$ .

**Solución.-**  $e^{3x} \left( \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27} \right) + C$ .

4. Calcular la integral  $\int x^3 e^{-x} dx$ .

**Solución.-**  $-e^{-x} (x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C$ .

5. Calcular la integral  $\int x \sin x dx$ .

**Solución.-**  $-x \cos x + \sin x + C$ .

6. Calcular la integral  $\int x^2 \cos 2x dx$ .

**Solución.-**  $\frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$ .

7. Calcular la integral  $\int e^x \sin x dx$ .

**Solución.-**  $\frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C$ .

8. Calcular la integral  $\int x^5 e^{x^3} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{e^{x^3}}{3} (x^3 - 1) + C$ .

## Ejercicios de integrales definidas y cálculo de áreas

1. Calcular la integral definida  $\int_0^1 x^4 dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{5}$ .

2. Calcular la integral definida  $\int_0^1 e^x dx$ .

**Solución.-**  $e - 1$ .

3. Calcular la integral definida  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ .

**Solución.-** 1.

4. Calcular la integral definida  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\pi}{4}$ .

5. Hallar el área de la figura comprendida entre la curva  $y = 4 - x^2$  y el eje  $X$ .

**Solución.-**  $10\frac{2}{3}$ .

6. Hallar el área de la figura comprendida entre las curvas  $y^2 = 9x$  e  $y = 3x$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2}$ .

7. Hallar el área de la figura limitada por la hipérbola equilátera  $xy = a^2$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = a$  y  $x = 2a$ .

**Solución.-**  $a^2 \ln 2$ .