SEPTIEMBRE 2014

SELECTIVIDAD: MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio 1 Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \operatorname{sen} x}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} = (\text{Aplicamos L'Hôpital}) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3\operatorname{sen}(3x) - e^x + a}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \boxed{\frac{-1+a}{0}}$$

Para que este límite tenga un valor finito:

$$-1 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - e^x + x}{x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\operatorname{sen}(3x) - e^x + 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-9\cos(3x) - e^x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{-10}{2} = \boxed{-5}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. De entre todos los números reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

Nº real: $x \Rightarrow$ inverso: y / $x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x}$

$$S = x + y = x + \frac{1}{x}$$

$$S' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$\underline{S'=0} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x = \pm 1$$

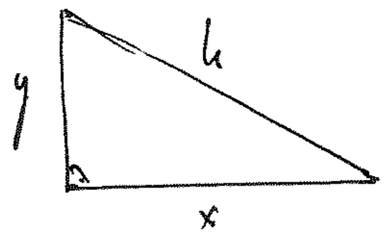
Signo de S'

$-\infty$		-1		0		1		∞
	$+$ ↗		$-$ ↘		$-$ ↘		$+$ ↗	

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{En } \underline{x=1} \text{ tenemos un mínimo} \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow \underline{y=1} \\ \underline{S = 1+1 = 2} \end{array}}$$

Opción A. Reserva 1

Ejercicio 1. De entre todos los triángulos rectángulos de área $8\ cm^2$, determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.



$$A = \frac{xy}{2} \Rightarrow A = 8 \Rightarrow \frac{x\cdot y}{2} = 8$$

$$y = \frac{16}{x}$$

$$h = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16^2}{x^2}}$$

$$h' = \frac{\cancel{2}x - \cancel{2}\cdot 16^2 \cdot 1/x^3}{\cancel{2}\sqrt{x^2+\frac{16^2}{x^2}}} = \frac{x - \frac{16^2}{x^3}}{\sqrt{x^2+\frac{16^2}{x^2}}}$$

$$h'=0 \Rightarrow x - \frac{16^2}{x^3} = 0 \Rightarrow x^4 = 16^2 = 4^4 \Rightarrow \boxed{x=4}\ cm$$

$$y = \frac{16}{x} \Rightarrow \boxed{y=4}\ cm \quad h = \sqrt{4^2+4^2} \Rightarrow \boxed{h = 4\sqrt{2}\ cm}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x \; ; & x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x} + \ln x \; ; & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 \; ; & x \leq 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} \; ; & x \geq 1 \end{cases}$$

Para calcular los extremos absolutos en el intervalo $[0, e]$ estudiamos el crecimiento y decrecimiento en dicho intervalo, así como los máx. y mín. relativos.

$$\underline{f'(x) = 0} \rightarrow -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Signo de $f'(x)$	$[0$		1		2		$e]$
		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
		$\ominus$		$\ominus$		$\oplus$	

Dado que la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$, lo es en $[0, e]$. La monotonía nos indica que:

A) $f(x)$ es decreciente en $(0, 2)$
B) $f(x)$ es creciente en $(2, e)$

por tanto:

* Tiene un mínimo relativo en: $\underline{\text{MÍN}(2, f(2)) = (2, 0)}$ que coincide con el <u>MÍNIMO ABSOLUTO</u> en ese intervalo
* El máx. <u>absoluto lo encontraremos</u> en uno de los

$$\boxed{\text{MÍNIMO ABSOLUTO: } (2, 0)}$$

OPCIÓN B. Reserva 1

Ejercicio 1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función derivable definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a - x & ; \ x \le 1 \\ \frac{b}{x} + \ln x & ; \ x > 1 \end{cases}$$

a) Calcula a y b.

b) Para $a = 3$ y $b = 2$ calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, e]$ (abcisa donde se obtienen y valores que se alcanzan.

a) [A] Imponiendo la continuidad en $x = 1$.

a.1. $\exists f(1) = a - 1$

a.2. $\exists \lim_{x \to 1} f(x) \iff \exists \lim_{x \to 1^-} f(x) = \exists \lim_{x \to 1^+} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (a - x) = a - 1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{b}{x} + \ln x\right) = b \end{array}\right\} \quad \underline{\underline{b = a - 1}}$$

a.3. $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) \iff \boxed{b = a - 1}$

[B] Imponemos la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & ; \ x \le 1 \\ -\frac{b}{x^2} + \frac{1}{x} & ; \ x \ge 1 \end{cases}$$

$f(x)$ es derivabilidad en $x = 1 \iff f'(1^-) = f'(1^+)$

$f'(1^-) = -1$; $f'(1^+) = -b + 1 \Rightarrow -b + 1 = -1 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

$a = b + 1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

extremos del intervalo $[0, e]$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 3 - 0 = 3 \\ f(e) = \frac{2}{e} + \ln e = 1 + \frac{2}{e} \end{array}\right\} f(0) > f(e)$$

Por tanto el máximo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[0, e]$ se encuentra en el punto de abcisa $x = 0$.

$$\boxed{\text{MÁX. ABSOLUTO}: (0, f(0)) = (0, 3)}$$

Ejercicio 2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x \cos(x)$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 0$.

b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 0)$.

a) La recta pasa por el punto $(0, f(0))$

$f(0) = e^0 \cdot \cos 0 = 1 \Rightarrow \boxed{P(0, 1)}$

Su pendiente viene dada por: $m = f'(0)$

$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \operatorname{sen}(x) = e^x (\cos(x) - \operatorname{sen}(x))$

$f'(0) = \overset{1}{e^0} (\overset{1}{\cos 0} - \overset{0}{\operatorname{sen} 0}) = 1 \Rightarrow \boxed{m = 1}$

$$\boxed{r: y = 1 + x}$$

b) $I = \int e^x \cos x \, dx = \left(\begin{array}{l} \text{POR PARTES:} \\ u = e^x \\ du = e^x dx \\ v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \end{array} \right) = e^x \operatorname{sen} x - \underbrace{\int e^x \operatorname{sen} x \, dx}_{II} = (1)$

$II = \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \left(\begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x dx \\ v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \end{array} \right) = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$

$= (1) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{I}$

$I = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) - I$

$2I = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$

$\boxed{F(x) = I = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x) + C}$

$\underline{F(0) = 0}$

$F(0) = \frac{e^0}{2} (\underset{0}{\operatorname{sen} 0} + \underset{1}{\cos 0}) + C \Rightarrow \frac{1}{2} + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{2}}$

$\boxed{F(x) = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x) - \frac{1}{2}}$