

# ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS

## RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

**EJERCICIO 1** : Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $\frac{2x^2-1}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{1-x}{6}$

b)  $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

c)  $4(5x+1)^2 - 9 = 0$

d)  $2x^4 + 9x^2 - 68 = 0$

e)  $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

f)  $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{5}{2}$

g)  $3\sqrt{x+2} - x = 4$

h)  $\frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$

i)  $x^4 - 9x^2 = 0$

j)  $\sqrt{x+1} + 5 = x$

k)  $\frac{1}{x} - \frac{3}{x} = x - 3$

l)  $3x^4 - 10x^2 - 8 = 0$

m)  $\frac{(2x+5)(3x-1)}{3} + \frac{x^2+5}{2} = \frac{7x-5}{6} + 1$

n)  $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 2$

ñ)  $\frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x} = \frac{-7}{4}$

o)  $x + \frac{8}{2x} = 5$

p)  $2x + \sqrt{6x+1} = 3$

q)  $\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x-1} = \frac{15}{4}$

r)  $\frac{81}{x^3} - 1 = 2$

s)  $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 3$

t)  $x(4x+1)(2x-7)(x^2-4) = 0$

u)  $x(9x^2-1)(2x+3) = 0$

v)  $\sqrt{x+1} - x = -5$

w)  $2x(\sqrt{x}-1)(x^2-5x+6) = 0$

x)  $\frac{1}{x} + \frac{5x-1}{x+2} = -7$

y)  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

z)  $\sqrt{5x-1} - 3 = -5x$

1)  $\frac{5}{2x+3} + \frac{4x}{2x-3} = 3$

**Solución:**

a) Multiplicamos los dos miembros por 6:  $3(2x^2-1) - 2(x-1) = 1-x \rightarrow 6x^2 - 3 - 2x + 2 = 1-x \rightarrow$

$$\rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12} \begin{cases} \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Las soluciones son  $x_1 = \frac{2}{3}$  y  $x_2 = \frac{-1}{2}$ .

b) Por ser bicuadrada, hacemos el cambio  $x^2 = z$ :

$$z^2 - 26z + 25 = 0 \rightarrow z = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{2} = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{26 \pm 24}{2} \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{50}{2} = 25 \end{cases}$$

Si  $z=1 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

Si  $z=25 \rightarrow x^2=25 \rightarrow x=\pm 5$

Las soluciones de esta ecuación son  $x_1=1$ ,  $x_2=-1$ ,  $x_3=5$  y  $x_4=-5$ .

c) Sabemos que si  $a^2=b^2$ , entonces, o bien  $a=b$  o bien  $a=-b$ .

En este caso:  $4(5x+1)^2 - 9 = 0 \rightarrow (5x+1)^2 = \frac{9}{4} \rightarrow (5x+1)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Así:  $5x+1 = \frac{3}{2} \rightarrow 10x+2=3 \rightarrow 10x=1 \rightarrow x = \frac{1}{10}$

$5x+1 = -\frac{3}{2} \rightarrow 10x+2=-3 \rightarrow 10x=-5 \rightarrow x = \frac{-5}{10} = \frac{-1}{2}$

Las soluciones son  $x_1 = \frac{1}{10}$  y  $x_2 = \frac{-1}{2}$ .

d)  $2x^4 + 9x^2 - 68 = 0$  equivale a  $2z^2 + z - 68 = 0$ , siendo  $z = x^2$ .

$$z = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 544}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{625}}{4} = \frac{-9 \pm 25}{4} \begin{cases} \frac{-34}{4} = \frac{-17}{2} \\ \frac{16}{4} = 4 \end{cases}$$

Si  $z = \frac{-17}{2} \rightarrow x^2 = \frac{-17}{2} \rightarrow$  no hay solución real.

Si  $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Las soluciones pedidas son  $x_1 = 2$  y  $x_2 = -2$ .

e) Hacemos el cambio:  $x^2 = z \rightarrow x^4 = z^2$

$$\text{Así obtenemos: } z^2 - 4z + 3 = 0 \rightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Si  $z = 3 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow$  Por tanto, hay cuatro soluciones:  $x_1 = -\sqrt{3}$ ,  $x_2 = \sqrt{3}$ ,  $x_3 = -1$ ,  $x_4 = 1$

Si  $z = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

$$\text{f) } \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{x^2}{2x} + \frac{4}{2x} = \frac{5x}{4x} \rightarrow x^2 + 4 = 5x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

g)  $3\sqrt{x+2} - x = 4 \rightarrow 3\sqrt{x+2} = 4 + x$ . Elevamos al cuadrado y operamos:

$$(3\sqrt{x+2})^2 = (4+x)^2 \rightarrow 9(x+2) = 16 + 8x + x^2 \rightarrow 9x + 18 = 16 + 8x + x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = x^2 - x - 2 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{h) } \frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{5}{6} \rightarrow \frac{12x^2}{6x(x+1)} - \frac{6(x+1)}{6x(x+1)} = \frac{5x(x+1)}{6x(x+1)} \rightarrow 12x^2 - 6x - 6 = 5x^2 + 5x \rightarrow 7x^2 - 11x - 6 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 168}}{14} = \frac{11 \pm \sqrt{289}}{14} = \frac{11 \pm 17}{14} \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-6}{14} = \frac{-3}{7} \end{cases}$$

$$\text{i) } x^4 - 9x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Hay tres soluciones: } x_1 = 0, x_2 = -3, x_3 = 3$$

j)  $\sqrt{x+1} + 5 = x \rightarrow \sqrt{x+1} = x - 5$

$$\text{Elevamos al cuadrado y operamos: } (\sqrt{x+1})^2 = (x-5)^2 \rightarrow x+1 = x^2 - 10x + 25 \rightarrow 0 = x^2 - 11x + 24 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 8 \\ x = 3 \text{ (no válida)} \end{cases}$$

$$\text{k) } \frac{1}{x} - \frac{3}{x} = x - 3 \rightarrow \frac{1}{x} - \frac{3}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} \rightarrow 1 - 3 = x^2 - 3x \rightarrow 0 = x^2 - 3x + 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

l) Haciendo  $x^2 = z$ , se obtiene:  $3z^2 - 10z - 8 = 0 \Rightarrow z = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{6} = \frac{10 \pm 14}{6}$   $\left\{ \begin{array}{l} \frac{24}{6} = 4 \\ \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \end{array} \right.$

Si  $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Si  $z = \frac{-2}{3} \rightarrow x^2 = \frac{-2}{3} \rightarrow$  no hay solución real.

Las soluciones son  $x_1 = 2$  y  $x_2 = -2$ .

m) Multiplicamos ambos miembros por 6:  $2(2x+5)(3x-1) + 3(x^2+5) = 7x-5+6 \rightarrow$

$\rightarrow 12x^2 - 4x + 30x - 10 + 3x^2 + 15 - 7x + 5 - 6 = 0 \rightarrow 15x^2 + 19x + 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{-19 \pm \sqrt{361 - 240}}{30} = \frac{-19 \pm \sqrt{121}}{30} = \frac{-19 \pm 11}{30}$   $\left\{ \begin{array}{l} \frac{-30}{30} = -1 \\ \frac{-8}{30} = \frac{-4}{15} \end{array} \right.$  Las soluciones son  $x_1 = -1$  y  $x_2 = \frac{-4}{15}$ .

n)  $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{x-2}$  Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x - 2 = 4 + x - 4\sqrt{x} \rightarrow 4\sqrt{x} = 6 \rightarrow 2\sqrt{x} = 3$

Volvemos a elevar al cuadrado:  $4x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{4}$  es la posible solución.

Lo comprobamos:  $\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$  Luego  $x = \frac{9}{4}$  es la solución buscada.

ñ) Multiplicamos ambos miembros por  $4x(x+2)$ :

$4x - 4(x+2)^2 = -7x(x+2) \rightarrow 4x - 4(x^2 + 4x + 4) = -7x^2 - 14x \rightarrow$

$\rightarrow 4x - 4x^2 - 16x - 16 = -7x^2 - 14x \rightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{-2 \pm 14}{6}$   $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ \frac{-16}{6} = \frac{-8}{3} \end{array} \right.$

Comprobamos estas soluciones sobre la ecuación:

$\frac{1}{4} - \frac{4}{2} = \frac{1-8}{4} = \frac{-7}{4} \rightarrow 2$  es solución.

$\frac{1}{\frac{-8}{3} + 2} - \frac{\frac{-8}{3} + 2}{\frac{-8}{3}} = \frac{1}{\frac{-2}{3}} - \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{-8}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{2}{8} = \frac{-14}{8} = \frac{-7}{4} \rightarrow \frac{-8}{3}$  es solución.

Las soluciones son  $x_1 = 2$  y  $x_2 = \frac{-8}{3}$ .

o) Multiplicamos ambos miembros por  $2x$ :

$2x^2 + 8 = 10x \rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$   $\left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \right.$

Comprobación de las posibles soluciones:  $4 + \frac{8}{8} = 4 + 1 = 5 \rightarrow 4$  es solución;  $1 + \frac{8}{2} = 1 + 4 = 5 \rightarrow 1$  es solución

Las soluciones son  $x_1 = 4$  y  $x_2 = 1$ .

p)  $\sqrt{6x+1} = 3 - 2x \Rightarrow$  Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$6x+1 = 9 - 12x + 4x^2 \rightarrow 4x^2 - 18x + 8 = 0 \rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{16}{4} = 4 \end{array} \right.$$

Comprobamos las posibles soluciones sobre la ecuación:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{6}{2} + 1} = 1 + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3 \rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ es solución}$$

$$8 + \sqrt{24+1} = 8 + \sqrt{25} = 8 + 5 = 13 \rightarrow x = 4 \text{ no es solución}$$

La única solución es  $x = \frac{1}{2}$ .

$$4x(x-1) + 8x(x+1) = 15(x+1)(x-1) \rightarrow$$

q) Hacemos común denominador:  $\rightarrow 4x^2 - 4x + 8x^2 + 8x = 15x^2 - 15 \rightarrow$   
 $\rightarrow 12x^2 + 4x = 15x^2 - 15 \rightarrow 3x^2 - 4x - 15 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{4 \pm 14}{6} \left\{ \begin{array}{l} \frac{18}{6} = 3 \\ \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3} \end{array} \right.$$

Comprobamos las soluciones:

$$\frac{3}{3+1} + \frac{6}{3-1} = \frac{3}{4} + \frac{6}{2} = \frac{3+12}{4} = \frac{15}{4} \rightarrow 3 \text{ es solución.}$$

$$\frac{\frac{-5}{3}}{\frac{-5}{3}+1} + \frac{\frac{-10}{3}}{\frac{-5}{3}-1} = \frac{\frac{-5}{3}}{\frac{-2}{3}} + \frac{\frac{-10}{3}}{\frac{-8}{3}} = \frac{5}{2} + \frac{10}{8} = \frac{20+10}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} \rightarrow \frac{-5}{3} \text{ es solución.}$$

Las soluciones son  $x_1 = 3$  y  $x_2 = \frac{-5}{3}$ .

r) Multiplicamos ambos miembros por  $x^3 \Rightarrow \frac{81}{x^3} = 3 \rightarrow 81 = 3x^3 \rightarrow x^3 = 27 \rightarrow x = 3$

Comprobamos si es, o no, solución en la ecuación inicial:  $\frac{81}{27} - 1 = 3 - 1 = 2 \rightarrow x = 3$  es solución

s)  $\sqrt{x+4} = 3 - \sqrt{x-1}$  Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$x+4 = 9 + x - 1 - 6\sqrt{x-1} \rightarrow 6\sqrt{x-1} = 4 \rightarrow 3\sqrt{x-1} = 2$$

Volvemos a elevar al cuadrado:  $9(x-1) = 4 \rightarrow 9x - 9 = 4 \rightarrow 9x = 13 \rightarrow x = \frac{13}{9}$

Comprobamos si es, o no, solución:  $\sqrt{\frac{13}{9}+4} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}$  ;  $3 - \sqrt{\frac{13}{9}-1} = 3 - \sqrt{\frac{4}{9}} = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

Ambos miembros coinciden, luego  $x = \frac{13}{9}$  es la solución buscada.

t) Para que el producto de varios factores sea 0, alguno de ellos tiene que ser 0. Así:

$$x(4x+1)(2x-7)(x^2-4)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{4} \\ 2x-7=0 \rightarrow x=\frac{7}{2} \\ x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2 \end{cases} \text{ Las soluciones son } x=0, x=-\frac{1}{4}, x=\frac{7}{2}, x=2 \text{ y } x=-2.$$

u) Tenemos un producto de factores igualado a 0, luego se ha de cumplir que:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ 9x^2 - 1 &= 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \rightarrow x = \pm \frac{1}{3} \\ 2x + 3 &= 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2} \end{aligned} \Rightarrow \text{Las soluciones son } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = -\frac{1}{3} \text{ y } x_4 = -\frac{3}{2}.$$

v)  $\sqrt{x+1} - x = -5 \rightarrow \sqrt{x+1} = x - 5 \Rightarrow$  Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$x+1 = (x-5)^2 \rightarrow x+1 = x^2 - 10x + 25 \rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} \begin{matrix} / 8 \\ \backslash 3 \end{matrix}$$

Comprobamos estas soluciones sobre la ecuación:

$$\sqrt{8+1} - 8 = \sqrt{9} - 8 = 3 - 8 = -5 \rightarrow x = 8 \text{ es solución.}$$

$$\sqrt{3+1} - 3 = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1 \rightarrow x = 3 \text{ no es solución.}$$

w) Tenemos un producto de factores igualado a 0, luego se ha de cumplir:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ \sqrt{x} - 1 &= 0 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} / 3 \\ \backslash 2 \end{matrix} \end{aligned} \text{ Las soluciones son } x=0, x=1, x=2 \text{ y } x=3.$$

x) Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por  $x(x+2)$ :

$$\frac{1}{x} + \frac{5x+1}{x+2} = -7 \rightarrow x+2 + x(5x-1) = -7x(x+2) \rightarrow$$

$$\rightarrow x+2 + 5x^2 - x = -7x^2 - 14x \rightarrow 12x^2 + 14x + 2 = 0 \rightarrow 6x^2 + 7x + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{12} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-7 \pm 5}{12} \begin{matrix} / -1 \\ \backslash \end{matrix} \frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

Comprobamos si son o no solución, sustituyendo en la ecuación inicial:

$$\frac{1}{-1} + \frac{-5-1}{-1+2} = -1 - 6 = -7 \rightarrow x = -1 \text{ es solución.}$$

$$\frac{1}{-\frac{1}{6}} + \left(-\frac{5}{6} - 1\right) : \left(-\frac{1}{6} + 2\right) = -6 - \frac{11}{6} : \frac{11}{6} = -6 - 1 = -7 \rightarrow x = -\frac{1}{6} \text{ es solución.}$$

$$\text{y) Haciendo } x^2 = z, \text{ obtenemos } \rightarrow z^2 - 3z - 4 = 0 \rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{matrix} / 4 \\ \backslash -1 \end{matrix}$$

$$\text{Así: } z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$z = -1 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{no hay solución.}$$

Las soluciones son:  $x_1 = 2, x_2 = -2$

z)  $\sqrt{5x-1} - 3 = -5x \rightarrow \sqrt{5x-1} = 3 - 5x \Rightarrow$  Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$5x - 1 = (3 - 5x)^2 \rightarrow 5x - 1 = 9 - 30x + 25x^2 \rightarrow 25x^2 - 35x + 10 = 0 \rightarrow 5x^2 - 7x + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{10} = \frac{7 \pm 3}{10} \begin{cases} 1 \\ \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Comprobamos estas soluciones sobre la ecuación:

$$\sqrt{5 \cdot 1 - 1} - 3 = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1 \neq -5 \rightarrow x = 1 \text{ no es solución.}$$

$$\sqrt{5 \cdot \frac{2}{5} - 1} - 3 = \sqrt{1} - 3 = -2 = -5 \cdot \frac{2}{5} \rightarrow x = \frac{2}{5} \text{ es solución.}$$

1) Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por  $(2x + 3)(2x - 3)$ :

$$\frac{5}{2x+3} + \frac{4x}{2x-3} = 3 \rightarrow 5(2x-3) + 4x(2x+3) = 3(2x+3)(2x-3) \rightarrow$$

$$\rightarrow 10x - 15 + 8x^2 - 12x = 3(4x^2 - 9) \rightarrow 8x^2 + 22x - 15 = 12x^2 - 27 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x^2 - 22x - 12 = 0 \rightarrow 2x^2 - 11x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{11 \pm 13}{4} = \begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ 6 \end{cases}$$

Comprobamos estas soluciones en la ecuación:

$$\frac{5}{-1+3} + \frac{-2}{-4} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ es solución.}$$

$$\frac{5}{12+3} + \frac{24}{12-3} = \frac{5}{15} + \frac{24}{9} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{9}{3} = 3 \rightarrow x = 6 \text{ es solución.}$$

Las soluciones son:  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 6$

**EJERCICIO 2 :** Escribe una ecuación cuyas soluciones sean  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$  y  $-\frac{3}{2}$ .

**Solución:**

La ecuación  $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$  tiene como soluciones las pedidas.

Multiplicando estos tres factores se llega a la ecuación buscada:

$$\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \rightarrow x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0 \rightarrow 8x^3 + 12x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ es la solución.}$$

## SISTEMAS DE INECUACIONES

**EJERCICIO 3 :** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{2y}{5} = 5 \\ \frac{2x+1}{3} = y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{6x-1}{7} = 3(y-1) \\ 6y + x = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \sqrt{2y+1} + x = 2 \\ x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{x+3}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ \frac{y-1}{3} = 3x-1 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 3xy - 3 = -5y \\ x + y = -5 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x - y = 12 \\ \frac{3}{2}x + 5y = 4 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} \frac{x+2}{5} - y = -8 \\ \frac{y+1}{2} + \frac{x-1}{4} = 2 \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} 5y - 2x = \frac{5}{2} \\ 4x + \frac{5}{3}y = 2 \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{4y}{2} = 8 \\ \frac{2y-5}{6} + \frac{5x}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\text{j) } \begin{cases} y + 2x = 2 \\ \frac{10x+3}{5} = 5y - 1 \end{cases}$$

$$\text{k) } \begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ \frac{10x+8}{3} = 2y + \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\text{l) } \begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ x^2 - 6y^2 = -5 \end{cases}$$

$$\text{m) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$\text{n) } \begin{cases} \sqrt{x-2} + y = 3 \\ -5 + 2x = x - y \end{cases}$$

$$\text{ñ) } \begin{cases} xy + 2 = 4x \\ y - x = 1 \end{cases}$$

$$\text{o) } \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ xy = 6 \end{cases}$$

Solución:

a) Comenzamos por simplificar cada una de las ecuaciones del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} + \frac{2y}{5} = 5 \\ \frac{2x+1}{3} = y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 5(x-1) + 4y = 50 \\ 2x+1 = 3y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 4y = 55 \\ 2x - 3y = -1 \end{array} \right\}$$

Despejamos  $y$  de la 1ª ecuación y de la 2ª, e igualamos:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{-5x+55}{4} \\ y = \frac{2x+1}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{-5x+55}{4} = \frac{2x+1}{3} \rightarrow 3(-5x+55) = 4(2x+1) \rightarrow$$

$$\rightarrow -15x + 165 = 8x + 4 \rightarrow 161 = 23x \rightarrow x = \frac{161}{23} = 7 \rightarrow y = \frac{2 \cdot 7 + 1}{3} = \frac{15}{3} = 5 \text{ La solución es: } x = 7, y = 5$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{6x-1}{7} = 3(y-1) \\ 6y + x = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x-1 = 21y-21 \\ x+6y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x-21y = -20 \\ x+6y = 3 \end{array} \right\}$$

Aplicamos el método de reducción en  $x$  multiplicando la segunda ecuación por  $-6$ :

$$\begin{array}{r} 6x - 21y = -20 \\ -6x - 36y = -18 \\ \hline -57y = -38 \end{array} \rightarrow y = \frac{38}{57} \rightarrow y = \frac{2}{3}$$

$$\text{Luego: } x = 3 - 6y = 3 - 6 \cdot \frac{2}{3} = 3 - 4 = -1 \Rightarrow \text{La solución es: } x = -1, y = \frac{2}{3}$$

c) Despejamos  $x$  de la 2ª ecuación y sustituimos en la primera:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2y+1} + x = 2 \\ x - 4y = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{2y+1} + x = 2 \\ x = 4y + 4 \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt{2y+1} + 4y + 4 = 2 \rightarrow \sqrt{2y+1} = -2 - 4y$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$2y + 1 = (-2 - 4y)^2 \rightarrow 2y + 1 = 4 + 16y + 16y^2 \rightarrow 16y^2 + 14y + 3 = 0$$

$$y = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 192}}{32} = \frac{-14 \pm \sqrt{4}}{32} = \frac{-14 \pm 2}{32} \left\{ \begin{array}{l} \frac{-16}{32} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-12}{32} = -\frac{3}{8} \end{array} \right.$$

$$y = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 4 \left( -\frac{1}{2} \right) + 4 = -2 + 4 = 2$$

Así:

$$y = -\frac{3}{8} \rightarrow x = 4 \left( -\frac{3}{8} \right) + 4 = -\frac{3}{2} + 4 = \frac{5}{2}$$

Comprobamos si ambas soluciones son válidas sustituyendo en la 1ª ecuación:

$$\sqrt{2 \left( -\frac{1}{2} \right) + 1} + 2 = \sqrt{0} + 2 = 2 \rightarrow x = 2, y = -\frac{1}{2} \text{ es solución del sistema.}$$

$$\sqrt{2 \left( -\frac{3}{8} \right) + 1} + \frac{5}{2} = \sqrt{-\frac{3}{4} + 1} + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3 \neq 2 \rightarrow x = \frac{5}{2}, y = -\frac{3}{8} \text{ no es solución del sistema.}$$

$$\text{d) Simplificamos cada una de las ecuaciones del sistema: } \left. \begin{array}{l} \frac{x+3}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ \frac{y-1}{3} = 3x-1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3(x+3) + 2y = 12 \\ y-1 = 3(3x-1) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x+2y = 3 \\ 9x-y = 2 \end{array} \right\}$$

Aplicamos el método de reducción en  $y$ , multiplicando por 2 la 2ª ecuación:

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 3 \\ 18x - 2y = 4 \\ \hline 21x = 7 \end{array} \rightarrow x = \frac{7}{21} \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow y = 9 \cdot \frac{1}{3} - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$\text{La solución del sistema es: } x = \frac{1}{3}, y = 1$$

e) Despejamos  $x$  de la 2ª ecuación y sustituimos en la primera:

$$\left. \begin{array}{l} 3xy - 3 = -5y \\ x = -y - 5 \end{array} \right\} \rightarrow 3(-y-5)y - 3 = -5y \rightarrow -3y^2 - 15y - 3 = -5y \rightarrow 3y^2 + 10y + 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-10 \pm 8}{6} = \begin{cases} -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \\ -\frac{18}{6} = -3 \end{cases}$$

Así:  $y = -\frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{1}{3} - 5 = -\frac{14}{3}$  Las soluciones del sistema son:  $x_1 = -\frac{14}{3}; y_1 = -\frac{1}{3}$   
 $y = -3 \rightarrow x = 3 - 5 = -2$   $x_2 = -2; y_2 = -3$

f) Método de sustitución  $\rightarrow$  Despejamos  $y$  de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x - 12 \\ \frac{3}{2}x + 5(2x - 12) = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{3}{2}x + 10x - 60 = 4$$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por 2:  $3x + 20x - 120 = 8 \rightarrow 23x = 128 \rightarrow x = \frac{128}{23}$

Se calcula el valor de  $y$ :  $y = 2 \cdot \frac{128}{23} - 12 \rightarrow y = \frac{256 - 276}{23} \rightarrow y = \frac{-20}{23}$

Comprobamos con la calculadora:

$$2 \times 128 \text{ a}^{\text{b/c}} 23 \text{ - } 20 \text{ a}^{\text{b/c}} 3 \text{ +/- } = 12$$

$$3 \text{ a}^{\text{b/c}} 2 \times 128 \text{ a}^{\text{b/c}} 23 \text{ + } 5 \times 20 \text{ a}^{\text{b/c}} 23 \text{ +/- } = 4$$

g) Comenzamos por simplificar el sistema:  $\begin{cases} \frac{x+2}{5} - y = -8 \\ \frac{y+1}{2} + \frac{x-1}{4} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2-5y = -40 \\ 2(y+1)+x-1=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-5y = -42 \\ 2y+x=7 \end{cases}$   
 $-x+5y = 42$

Utilizaremos el método de reducción en  $x$ , multiplicando la primera ecuación por  $-1$ :  $\begin{array}{r} x+2y = 7 \\ -x+5y = 42 \\ \hline 7y = 49 \end{array} \rightarrow y = 7$

Calculamos el valor de  $x$ :  $x = 7 - 2y \rightarrow x = 7 - 2 \cdot 7 \rightarrow x = 7 - 14 \rightarrow x = -7$

La solución que cumple el sistema es:  $x = -7, y = 7$

Comprobamos dicha solución:  $\frac{-7+2}{5} - 7 = -1 - 7 = -8$   
 $\frac{7+1}{2} + \frac{-7-1}{4} = 4 - 2 = 2$

h) Utilizaremos el método de reducción en  $y$ ; para ello multiplicamos la 2ª ecuación por  $-3$ :

$$\begin{array}{r} -2x + 5y = \frac{5}{2} \\ -12x - 5y = -6 \\ \hline -14x = \frac{5}{2} - 6 \end{array} \rightarrow -14x = \frac{-7}{2} \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Calculamos  $y$  sustituyendo el valor de  $x$  en la 1ª ecuación:  $5y - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \rightarrow 5y - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow 5y = 3 \rightarrow y = \frac{3}{5}$

La solución buscada es:  $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{5}$

Comprobamos la solución:  $\begin{cases} 5 \cdot \frac{3}{5} - 2 \cdot \frac{1}{4} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1 + 1 = 2 \end{cases}$



i) Comenzamos por simplificar cada una de las ecuaciones del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+1}{3} - \frac{4y}{2} = 8 \\ \frac{2y-5}{6} + \frac{5x}{2} = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2(x+1) - 12y = 48 \\ 2y - 5 + 15x = 18 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 12y = 46 \\ 15x + 2y = 23 \end{array} \right\} \rightarrow \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 6y = 23 \\ 15x + 2y = 23 \end{array} \right\}$$

Despejamos  $x$  de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:  $x = 23 + 6y$

$$15(23 + 6y) + 2y = 23 \rightarrow 345 + 90y + 2y = 23 \rightarrow \rightarrow 92y = -322 \rightarrow y = \frac{-322}{92} \rightarrow y = \frac{-7}{2}$$

$$\text{Calculamos el valor de } x: x = 23 + 6\left(\frac{-7}{2}\right) \rightarrow x = 23 - 21 \rightarrow x = 2$$

Comprobamos con la calculadora:

$$2 \times 2 - 12 \times 7 \div 2 = 46$$

$$15 \times 2 + 2 \times 7 \div 2 = 23$$

j) Comenzamos por simplificar la segunda ecuación transformándola en otra equivalente:

$$10x + 3 = 5(5y - 1) \rightarrow 10x + 3 = 25y - 5 \rightarrow 10x - 25y = -8$$

$$\text{El sistema es: } \begin{cases} y + 2x = 2 \\ 10x - 25y = -8 \end{cases} \text{ Resolvemos por el método de sustitución: } y = 2 - 2x$$

$$10x - 25(2 - 2x) = -8 \rightarrow 10x - 50 + 50x = -8 \rightarrow 60x = 42 \rightarrow x = \frac{42}{60} \rightarrow x = \frac{7}{10}$$

$$\text{Luego: } y = 2 - 2 \cdot \frac{7}{10} \rightarrow y = 2 - \frac{7}{5} \rightarrow y = \frac{3}{5} \quad \text{La solución al sistema es: } x = \frac{7}{10}, y = \frac{3}{5}$$

Comprobamos la solución:

$$\frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{7}{10} = \frac{3}{5} + \frac{14}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\frac{10 \cdot \frac{7}{10} + 3}{5} - 5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{10}{5} - 3 = \frac{-5}{5} = -1$$

k) Transformamos la segunda ecuación en una equivalente sin denominadores:

$$10x + 8 = 6y + 10 \rightarrow 10x - 6y = 2 \rightarrow 5x - 3y = 1$$

$$\text{El sistema a resolver es: } \begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Despejamos } x \text{ de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: } x = \frac{1+3y}{5}$$

$$y^2 - \frac{(1+3y)^2}{25} = 5 \rightarrow 25y^2 - (1+6y+9y^2) = 125 \rightarrow 25y^2 - 1 - 6y - 9y^2 - 125 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y^2 - 6y - 126 = 0 \rightarrow 8y^2 - 3y - 63 = 0 \rightarrow \rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9+2016}}{16} = \frac{3 \pm \sqrt{2025}}{16} = \frac{3 \pm 45}{16} \begin{array}{l} / 3 \\ \backslash -21 \\ \phantom{=} 8 \end{array}$$

$$\text{Si } y = 3 \rightarrow x = \frac{1+9}{5} = 2$$

$$\text{Si } y = \frac{-21}{8} \rightarrow x = \frac{1 - \frac{63}{8}}{5} = \frac{\frac{-55}{8}}{5} = \frac{-11}{8}$$

$$x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 3$$

$$\text{Las soluciones al sistema son: } x_2 = \frac{-11}{8} \rightarrow y_2 = \frac{-21}{8}$$

l) Multiplicamos la segunda ecuación por  $-3$  para aplicar el método de reducción:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ -3x^2 + 18y^2 = 15 \\ \hline 13y^2 = 13 \end{array} \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

Como  $x^2 = 6y^2 - 5 \rightarrow$

$$\begin{cases} \text{si } y = 1 \rightarrow x^2 = 6 - 5 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \\ \text{si } y = -1 \rightarrow x^2 = 6 - 5 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Las soluciones son:

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 1 \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = -1 \\ x_3 = -1 \rightarrow y_3 = 1 \\ x_4 = -1 \rightarrow y_4 = -1 \end{array}$$

m) Despejamos  $y$  de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$y = \frac{6}{x}$$

$$x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 13 \rightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} = 13 \rightarrow x^4 + 36 = 13x^2$$

Hacemos el cambio:  $x^2 = z \rightarrow x^4 = z^2$

Así obtenemos:  $z^2 - 13z + 36 = 0 \rightarrow z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$

$$\begin{cases} z = 9 \\ z = 4 \end{cases}$$

Si  $z = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$$\begin{cases} \text{Si } x = -3 \rightarrow y = -2 \\ \text{Si } x = 3 \rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Si  $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$$\begin{cases} \text{Si } x = -2 \rightarrow y = -3 \\ \text{Si } x = 2 \rightarrow y = 3 \end{cases}$$

n) El sistema inicial es equivalente a  $\begin{cases} \sqrt{x-2} + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Aplicamos el método de igualación:  $\begin{cases} y = 3 - \sqrt{x-2} \\ y = 5 - x \end{cases} \rightarrow 3 - \sqrt{x-2} = 5 - x \rightarrow x - 2 = \sqrt{x-2}$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la última igualdad:  $(x-2)^2 = x-2 \rightarrow (x-2)^2 - (x-2) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow (x-2)(x-2-1) = 0 \rightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

$$\begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

Si  $x = 2 \rightarrow y = 3$

Si  $x = 3 \rightarrow y = 2$

Comprobamos las soluciones sobre el sistema:  $\begin{cases} \sqrt{x-2} + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{2-2} + 3 = 3 \\ 2 + 3 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{3-2} + 2 = 1 + 2 = 3 \\ 2 + 3 = 5 \end{cases}$

Luego ambas soluciones son válidas:  $x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 3$

$$x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 2$$

ñ) Despejamos  $y$  de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$y = 1 + x$$

$$x(1+x) + 2 = 4x \rightarrow x + x^2 + 2 - 4x = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\begin{cases} 2 \rightarrow y = 3 \\ 1 \rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Las soluciones son: } \begin{array}{l} x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 3 \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 2 \end{array}$$

o) Empezamos simplificando la primera ecuación multiplicándola por  $xy$ :  $6x^2 + 6y^2 = 13xy$

Como  $xy = 6 \Rightarrow 6x^2 + 6y^2 = 13 \cdot 6 \rightarrow x^2 + y^2 = 13$

Por tanto, el sistema a resolver es: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Despejamos  $y$  en la segunda ecuación y sustituimos en la primera:  $y = \frac{6}{x}$ ;  $x^2 + \frac{36}{x^2} = 13 \rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Ecuación bicuadrada:  $x^2 = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$

Si  $x = 3 \rightarrow y = 2$

Si  $x = 2 \rightarrow y = 3$

Si  $x = -3 \rightarrow y = -2$

Si  $x = -2 \rightarrow y = -3$

Comprobemos si las dos primeras soluciones son, o no, válidas: 
$$\begin{cases} \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6} \\ 3 \cdot 2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{4+9}{6} = \frac{13}{6} \\ 3 \cdot 2 = 6 \end{cases}$$

$x_1 = 3 \rightarrow y_1 = 2$

$x_2 = 2 \rightarrow y_2 = 3$

Análogamente se cumpliría para las otras dos. Luego, las soluciones son:

$x_3 = -3 \rightarrow y_3 = -2$

$x_4 = -2 \rightarrow y_4 = -3$

## PROBLEMAS

**EJERCICIO 4 :** Un grupo de amigos alquilan un piso por 600 € al mes para vivir en él. Con el fin de ahorrar en los gastos del piso, deciden que dos personas más compartan con ellos el piso; de esta manera pagarían 80 € menos. Calcula cuántas personas van a vivir inicialmente en el piso y la cantidad que pagaría cada una por el alquiler.

**Solución:**

$x \rightarrow$  n° de personas que alquilan el piso

$y \rightarrow$  precio que paga cada una por el alquiler

El sistema a resolver será: 
$$\left. \begin{cases} \frac{600}{x} = y \\ \frac{600}{x-2} = y + 80 \end{cases} \right\} \rightarrow \text{Aplicamos el método de sustitución:}$$

$\rightarrow 600x = 600(x-2) + 80x(x-2) \rightarrow 600x = 600x - 1200 + 80x^2 - 160x \rightarrow$

$\rightarrow 80x^2 - 160x - 1200 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases} \rightarrow \text{NO SIRVE}$

Luego el número de personas que alquilan el piso es 5, y cada una paga mensualmente  $\frac{600}{5} = 120$  €.

**EJERCICIO 5 :** Hace cinco años, la edad de un padre era seis veces superior a la del hijo; sin embargo, en la actualidad solo es 5 años más que el triple de la edad del hijo. Calcula las edades actuales de ambos.

**Solución:**

EDAD DEL	HACE 5 AÑOS	HOY
PADRE	$6x$	$6x + 5$
HIJO	$x$	$x + 5$

En la actualidad: edad del padre = 3 · edad hijo + 5  $\rightarrow$

$\rightarrow 6x + 5 = 3(x + 5) + 5 \rightarrow 6x + 5 = 3x + 15 + 5 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$

La edad actual del padre es de 35 años, y la del hijo, 10 años.

**EJERCICIO 6 :** Halla dos números que sumen 14 y tales que la diferencia de sus cuadrados sea 28.

**Solución:** Llamamos  $x$  e  $y$  a los dos números buscados y planteamos un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 14 \\ x^2 - y^2 = 28 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 14 - y \\ x^2 - y^2 = 28 \end{array} \right\} \rightarrow (14 - y)^2 - y^2 = 28 \rightarrow 196 - 28y + y^2 - y^2 = 28 \rightarrow$$

$$\rightarrow 196 - 28 = 28y \rightarrow 168 = 28y \rightarrow y = \frac{168}{28} = 6 \rightarrow x = 14 - 6 = 8 \text{ Los números buscados son 8 y 6.}$$

**EJERCICIO 7 :** Antonio gastó la tercera parte del dinero de una herencia en un televisor nuevo,  $\frac{3}{5}$  del resto en reformar la casa, el 10% de la cantidad inicial en ropa y el resto, 260 € los ahorró. ¿Cuánto dinero heredó?

Televisor  $\rightarrow \frac{x}{3} \rightarrow$  le quedan  $\frac{2}{3}x$  por gastar

**Solución:**  $x =$  “dinero heredado”  $\Rightarrow$  Casa  $\rightarrow \frac{3}{5}$  de  $\frac{2}{3}x = \frac{6}{15}x = \frac{2}{5}x$

Ropa  $\rightarrow 10\%$  de  $x = \frac{x}{10}$

Ahorro  $\rightarrow 260 \text{ €}$

La ecuación que resuelve el problema será:  $\frac{x}{3} + \frac{2}{5}x + \frac{x}{10} + 260 = x$

Multiplicamos ambos miembros por 30:  $10x + 12x + 3x + 7800 = 30x \rightarrow 7800 = 5x \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{7800}{5} \rightarrow x = 1560 \text{ € es la cantidad heredada.}$$

**EJERCICIO 8 :** El área de un rombo es de 240 cm<sup>2</sup>. Calcula la longitud de las diagonales sabiendo que suman 46 cm.

**Solución:** Llamamos  $x$  y  $46 - x$  a las longitudes de ambas diagonales.

$$A_{\text{ROMBO}} = \frac{\text{Diagonal mayor} \cdot \text{Diagonal menor}}{2}$$

$$\text{Así: } 240 = \frac{x(46 - x)}{2} \rightarrow 480 = 46x - x^2 \rightarrow x^2 - 46x + 480 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{46 \pm \sqrt{2116 - 1920}}{2} = \frac{46 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{46 \pm 14}{2} \begin{array}{l} / 30 \\ \backslash 16 \end{array}$$

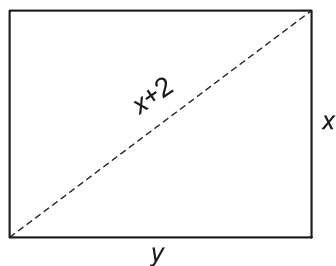
$$\text{Si } x = 30 \rightarrow 46 - 30 = 16$$

$$\text{Si } x = 16 \rightarrow 46 - 16 = 30$$

Luego, la longitud de las diagonales es de 16 cm y 30 cm.

**EJERCICIO 9 :** La diagonal de un rectángulo mide 2 cm más que uno de los lados. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que su perímetro es de 14 cm.

**Solución:**



$$\begin{cases} 2x + 2y = 14 \rightarrow x + y = 7 \\ (x+2)^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Despejamos  $y$  en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$y = 7 - x$$

$$(x+2)^2 = x^2 + (7-x)^2 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 49 + x^2 - 14x \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 14x - 4x + 49 - 4 = 0 \rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 180}}{2} = \frac{18 \pm 12}{2} \begin{cases} 3 \\ 15 \end{cases}$$

Calculamos el valor de  $y$ : Si  $x = 3 \rightarrow y = 7 - 3 = 4$

Si  $x = 15 \rightarrow y = 7 - 15 = -8 \rightarrow$  no sirve (una longitud no puede ser negativa)

Luego las dimensiones del rectángulo son 3 cm y 4 cm.

**EJERCICIO 10 :** Un grupo de estudiantes organiza una excursión para lo cuál alquilan un autocar cuyo precio es de 540 € Al salir, aparecen 6 estudiantes más y esto hace que cada uno de los anteriores pague 3 € menos. Calcula el número de estudiantes que fueron a la excursión y que cantidad pagó cada uno.

**Solución:**

$x$  = “nº de estudiantes que van a la excursión”

$y$  = “precio que paga cada estudiante”

El sistema a resolver será: 
$$\begin{cases} \frac{540}{x} = y \\ \frac{540}{x-6} = y+3 \end{cases} \rightarrow$$
 Aplicamos el método de sustitución:

$$\frac{540}{x-6} = \frac{540}{x} + 3 \rightarrow 540x = 540(x-6) + 3x(x-6) \rightarrow 540x = 540x - 3240 + 3x^2 - 18x \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x^2 - 18x - 3240 = 0 \rightarrow x^2 - 6x - 1080 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4320}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4356}}{2} = \frac{6 \pm 66}{2} \begin{cases} 36 \\ -30 \text{ no sirve} \end{cases}$$

El precio por alumno será:  $y = \frac{540}{36} = 15$

Luego, van 36 estudiantes a la excursión y cada uno paga 15 €

**EJERCICIO 11 :** Un bodeguero quiere mezclar vino de calidad superior cuyo precio es de 6 €/l con otro más corriente de 2 €/l. Dispone en total de 315 l. Calcula el número de litros de cada clase para que la mezcla cueste 4,4 €/l.

**Solución:**

$x$  = litros del vino que cuesta 6 €/l,

$y$  = litros del vino que cuesta 2 €/l,

El sistema a resolver será: 
$$\begin{cases} x + y = 315 \\ 6x + 2y = 315 \cdot 4,4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 315 \\ 6x + 2y = 1386 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -630 \\ 6x + 2y = 1386 \\ 4x = 756 \end{cases} \rightarrow x = 189$$

Luego,  $y = 315 - 189 = 126$ . Ha de mezclar 189 l de vino bueno con 126 l del más corriente.

**EJERCICIO 12 :** Pablo tiene unos ingresos anuales de 24 000 € Parte de ese dinero está en una cuenta en la que le dan el 4% anual; el resto lo gasta. Calcula la cantidad de dinero gastado y ahorrado, sabiendo que al final del año recibe 360 € de intereses.

**Solución:**

$x$  = “Dinero gastado”

$y$  = “Dinero ahorrado”

$$\begin{cases} x + y = 24000 \\ 4\% \text{ de } y = 360 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 24000 \\ \frac{4y}{100} = 360 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 24000 - y - 15000 \\ y = \frac{36000}{4} = 9000 \end{cases} \quad \text{Gasta 15 000 € y ahorra 9 000 €}$$

**EJERCICIO 13 :** Halla las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que tiene  $48 \text{ cm}^2$  de área y que su diagonal mide  $10 \text{ cm}$ .

**Solución:** Llamamos  $x$  a la base e  $y$  a la altura del rectángulo. Por tanto, tenemos que: 
$$\begin{cases} x \cdot y = 48 \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases}$$

Despejamos  $y$  en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$y = \frac{48}{x}$$

$$x^2 + \left(\frac{48}{x}\right)^2 = 100 \rightarrow x^2 + \frac{2304}{x^2} = 100 \rightarrow x^4 + 2304 = 100x^2 \rightarrow x^4 - 100x^2 + 2304 = 0$$

Hacemos el cambio:  $x^2 = z \rightarrow x^4 = z^2$

$$\text{Así obtenemos: } z^2 - 100z + 2304 = 0 \rightarrow z = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 9216}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{784}}{2} = \frac{100 \pm 28}{2} \begin{cases} \frac{128}{2} = 64 \\ \frac{72}{2} = 36 \end{cases}$$

$$\text{Si } z = 64 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = \pm\sqrt{64} = \pm 8 \rightarrow x = 8 \rightarrow y = 6$$

$$\text{Si } z = 36 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} = \pm 6 \rightarrow x = 6 \rightarrow y = 8$$

(Observa que las soluciones negativas no son válidas, pues  $x$  representa una longitud).

El rectángulo es, por tanto, de  $8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ .

**EJERCICIO 14 :** Un rectángulo tiene  $60 \text{ cm}^2$  de área. Su perímetro es de  $34 \text{ cm}$ . Halla sus dimensiones.

**Solución:** Llamamos  $x$  a la base del rectángulo e  $y$  a su altura.

Por tanto, tenemos que: 
$$\begin{cases} x \cdot y = 60 \\ 2x + 2y = 34 \rightarrow x + y = 17 \end{cases}$$

Despejamos  $y$  en la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$y = 17 - x$$

$$x \cdot (17 - x) = 60 \rightarrow 17x - x^2 = 60 \rightarrow x^2 - 17x + 60 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} \begin{cases} x = 12 \rightarrow y = 5 \\ x = 5 \rightarrow y = 12 \end{cases}$$

El rectángulo es, por tanto, de  $12 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ .

**EJERCICIO 15 :** El producto de dos números es  $28$  y la suma de sus cuadrados es  $65$ . ¿De qué números se trata?

**Solución:** Llamamos  $x$  e  $y$  a los números que buscamos. Por tanto, tenemos que: 
$$\begin{cases} x \cdot y = 28 \\ x^2 + y^2 = 65 \end{cases}$$

Despejamos  $y$  en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$y = \frac{28}{x}$$

$$x^2 + \left(\frac{28}{x}\right)^2 = 65 \rightarrow x^2 + \frac{784}{x^2} = 65 \rightarrow x^4 + 784 = 65x^2$$

Hacemos el cambio:  $x^2 = z \rightarrow x^4 = z^2$

$$\text{Así obtenemos: } z^2 - 65z + 784 = 0 \rightarrow z = \frac{65 \pm \sqrt{4225 - 3136}}{2} = \frac{65 \pm \sqrt{1089}}{2} = \frac{65 \pm 33}{2} \begin{cases} z = 49 \\ z = 16 \end{cases}$$

$$\text{Si } z = 49 \rightarrow x^2 = 49 \rightarrow x = \pm\sqrt{49} = \pm 7 \begin{cases} \text{Si } x = -7 \rightarrow y = -4 \\ \text{Si } x = 7 \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

$$\text{Si } z = 16 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \begin{cases} \text{Si } x = -4 \rightarrow y = -7 \\ \text{Si } x = 4 \rightarrow y = 7 \end{cases}$$