EJERCICIOS resueltos

5. Halla P(x)+Q(x) y 2·P(x)-Q(x)

$P(x)=x^4+x^3+3x$ $\quad Q(x)=2x^3+x^2-4x+5$

P(x)→	1	1	0	3	0
Q(x)→		2	1	-4	5
P(x)+Q(x)→	1	3	1	-1	5

2·P(x)→	2	2	0	6	0
Q(x)→		2	1	-4	5
2·P(x)-Q(x) →	2	0	-1	10	-5

$$\mathbf{P(x)+Q(x)=x^4+3x^3+x^2-x+5} \qquad \mathbf{2\cdot P(x)-Q(x)=2x^4-x^2+10x-5}$$

6. ¿Cuál es el grado del cociente al dividir un polinomio de grado 5 entre otro de grado 2?

El grado del cociente es el grado del dividendo, 5, menos el del divisor, 2, luego 3.

7. Multiplica $P(x)=x^3+6x^2+4x-6$ por $Q(x)= x^3+3x^2+5x-2$

P(x)→				1	6	4	-6
Q(x)→				1	3	5	-2
				-2	-12	-8	12
			5	30	20	-30	
		3	18	12	-18		
	1	6	4	-6			
P(x)·Q(x)→	1	9	27	34	-10	-38	12

$$\mathbf{P(x)\cdot(Q(x)=x^6+9x^5+27x^4+34x^3-10x^2-38x+12}$$

8. Haz en cada caso la división de P(x) entre Q(x)

$P(x)= 2x^3+4x^2+7x+3$

$Q(x)= 2x^2+x+3$

P(x) Dividendo				Q(x) divisor		
2	4	7	3	2	1	3
2	1	3		1	1,5	
	3	4	3	cociente		
	3	1,5	4,5	x+1,5		
		2,5	-1,5			
		resto				
		2,5x-1,5				

$P(x)= 7x^2-2x+5$

$Q(x)=8x+7$

P(x) Dividendo			Q(x) divisor	
7	-2	5	8	7
7	$\frac{49}{8}$		$\frac{7}{8}$	$\frac{65}{-64}$
	$\frac{65}{-8}$	5	cociente	
	$\frac{65}{-8}$	$\frac{455}{-64}$	$\frac{7}{8}x-\frac{65}{64}$	
	$\frac{775}{64}$			
	resto			

EJERCICIOS resueltos

9. Observa cómo se aplican las identidades notables

Para desarrollar $(x+3)^2$
Cuadrado del 1º→x^2 Doble del 1º por el 2º→$2\cdot x\cdot 3=6x$ Cuadrado del 2º→$3^2=9$
por tanto $(x+3)^2=x^2+6x+9$

Para descomponer el polinomio $x^2-10x+25$,
se intenta ver uno de los miembros de una identidad notable,
al ser los signos de los coeficientes alternativos, + - +, se compara con la diferencia al cuadrado.
$25=5^2$ y $10x$=doble de x por 5→ $x^2-10x+25=(x-5)^2$

Para descomponer el polinomio $4x^2-25$
se intenta ver si es una identidad notable, al ser 0 el coeficiente de grado uno se compara con la diferencia de cuadrados
$4x^2=(2x)^2$; $25=5^2$ → $4x^2-25=(2x+5)\cdot(2x-5)$

10. Desarrolla las siguientes expresiones

Expresión	Solución	Expresión	Solución
$(x+4)^2$	$x^2+8x+16$	$(x-2)^2$	x^2-4x+4
$(4x+3)^2$	$16x^2+24x+9$	$(3-2x)^2$	$4x^2-12x+9$
$(2x/3+5)^2$	$4x^2/9+20x/3+25$	$(x/2-3)^2$	$x^2/4-3x+9$
$(\sqrt{2}x+1)^2$	$2x^2+2\sqrt{2}x+1$	$(x-\sqrt{3})^2$	$x^2-2\sqrt{3}x+3$

11. Halla la expresión en coeficientes de los siguientes productos

Productos	Solución	Productos	Solución
$(x+4)\cdot(x-4)$	x^2-16; 1 0 -16	$(x-1/2)\cdot(x+1/2)$	1 0 -1/4
$(2x+5)\cdot(2x-5)$	4 0 -25	$(3+\sqrt{2}x)\cdot(3-\sqrt{2}x)$	-2 0 9

12. Resuelve aplicando las identidades notables la ecuación $x^2+10x+16=0$

Se compara la primera parte, $\mathbf{x^2+10x}$, con una identidad notable, con $(x+5)^2$
Pues $(x+5)^2=\mathbf{x^2+10x}+25$, por tanto, $x^2+10x=(x+5)^2-25$
y el primer miembro de la ecuación es $\mathbf{x^2+10x}+16\mathbf{=(x+5)^2-25}+16$,
$(x+5)^2-9=0$→ $(x+5)^2-3^2=0$→ $(x+5+3)\cdot(x+5-3)=0$ → Soluciones $x=-8$ y $x=-2$

13. Calcula el cubo de un binomio

Binomio al cubo	Solución	Binomio al cubo	Solución
$(x+2)^3$	$x^3+6x^2+12x+8$	$(x-1)^3$	x^3-3x^2+3x-1
$(2x-3)^3$	$8x^3-36x^2+18x-27$	$(3+x/3)^3$	$x^3/27+x^2+9x+27$

14. Halla la fila 5 del triángulo de Pascal, y calcula $(x+1)^5$

La fila 5 del triángulo es 1 5 10 10 5 1, que son los coeficientes de $(x+1)^5$, por
tanto, $(x+1)^5=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$

EJERCICIOS resueltos

15. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+5x^2-2x+1$, $Q(x)=2x^4-5$ y $R(x)=x^3-4x+3x^2$ entre x-3

	1	5	-2	1
3)		3	24	66
	1	8	22	67

Cociente $x^2+8x+22$

Resto 67

	2	0	0	0	-5
3)		6	18	54	162
	2	6	18	54	157

Cociente $2x^3+6x^2+18x+54$

Resto 157

	1	3	-4	0
3)		3	18	42
	1	6	14	42

Cociente $x^2+6x+14$

Resto 42

16. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+3x^2-2x+1$, $Q(x)=x^4-2$ y $R(x)=x^3-4x^2-x$ entre x+1

	1	3	-2	1
-1)		-1	-2	4
	1	2	-4	5

Cociente x^2+2x-4

Resto 5

	1	0	0	0	-2
-1)		-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1

Cociente x^3-x^2+x-1

Resto -1

	1	-4	-1	0
-1)		-1	5	-4
	1	-5	4	-4

Cociente x^2-5x+4

Resto -4

17. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=3x^3+5x^2-2x+1$ y $Q(x)=6x^4-2$ y entre x+2/3

	3	5	-2	1
-2/3)		-2	-2	8/3
	3	3	-4	11/3

Cociente $3x^2+3x-4$

Resto 11/3

	6	0	0	0	-2
-2/3)		-4	8/3	-16/9	32/27
	6	-4	8/3	-16/9	-22/27

Cociente $6x^3-4x^2+\frac{8}{3}x-\frac{16}{9}$

Resto $-22/27$

18. Si el valor numérico de un polinomio en 2 es igual a 3 y el cociente de su división de entre x-2 es x ¿Sabes de que polinomio se trata?

Dividendo = divisor·cociente +resto, el divisor es x-2, el cociente x y el resto 3, por tanto el polinomio es x^2-2x+3

19. Halla m para que mx^2+2x-3 sea divisible entre x+1

El polinomio será divisible entre x+1 si su valor en -1 es 0, luego ha de ser

$m-2-3=0$, es decir, $m=5$

20. ¿Existe algún valor de m para que el polinomio $x^3+mx^2-2mx+5$ sea divisible por x-2?

Por el teorema del resto basta resolver la ecuación $2^3+m\cdot 2^2-2m\cdot 2+5=0$, lo que da una igualdad imposible 13=0, por tanto no hay ningún valor de m para el cual el polinomio sea divisible por x-2

EJERCICIOS resueltos

21. Saca factor común una potencia de x en cada uno de los siguientes polinomios:
$P(x)=2x^3+3x$ $\quad Q(x)= x^4+2x^6-3x^5$ $\quad R(x)=2x^6+6x^5+8x^3$

Solución: $P(x)=x\cdot(2x^2+3)$ $\quad Q(x)=x^4\cdot(2x^2-3x+1)$ $\quad R(x)=2x^3\cdot(x^3+3x^2+4)$, en este último caso se ha podido sacar factor común también un número.

22. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^7-x^6-4x^4}$

$\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x^3-x^2-4)$. Se ha sacado factor común x^4.
Las posibles raíces enteras de x^3-x^2**-4** son los **divisores de -4**:

1,-1, 2,-2, 4,-4

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	0	-4
1)		1	0	0
	1	0	0	**-4** $\neq$ **0,**

1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

	1	-1	0	-4
-1)		-1	2	-2
	1	-2	2	**-6** $\neq$ **0**

-1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si **2** es raíz de P

	1	-1	0	-4
2)		2	2	4
	1	1	2	**0**

2 es raíz de P

1 1 2 = x^2+x+2 La ecuación $x^2+x+2=0$ no tiene soluciones reales, por tanto es primo

$\boxed{\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x\mathbf{-2})\cdot(x^2+x+2)}$

23. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$

Las posibles raíces enteras de $x^4+x^3-x^2-2x$**-2** son los **divisores de -2**:

1,-1, 2,-2

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
1)		1	0	-1	-3
	1	0	-1	-3	**-5 distinto de 0,**

1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-1)		-1	2	-1	3
	1	-2	1	-3	**1 distinto de 0,**

-1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 2 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
2)		2	2	2	0
	1	1	1	0	**-2 distinto de 0,**

2 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-2)		-2	6	-10	24
	1	-3	5	-12	**22 distinto de 0,**

-2 no es raíz de P

$\boxed{\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2} \text{ No tiene raíces enteras}}$

No podemos hallar la descomposición factorial de este polinomio.

EJERCICIOS resueltos

25. Si los coeficientes de $P(x)=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+...+p_1x+p_0$ son números enteros, las posibles raíces racionales de P(x) son de la forma

$$\frac{\text{divisor de } p_0}{\text{divisor de } p_n}$$

Halla la descomposición factorial de $\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}$

Las posibles raíces en Q de $\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}$ son los cocientes de los divisores de 6 entre los divisores de 12,

$$\frac{\text{divisores de } 6}{\text{divisores de } 12};\quad \frac{\pm1\ \ \pm2\ \ \pm3\ \ \pm6}{\pm1\ \ \pm2\ \ \pm3\ \ \pm4\ \ \pm6\ \ \pm12}$$

$$\pm1\quad \pm\frac{1}{2}\quad \pm\frac{1}{3}\quad \pm\frac{1}{4}\quad \pm\frac{1}{6}\quad \pm\frac{1}{12}\quad \pm2\quad \pm\frac{2}{3}\quad \pm3\quad \pm\frac{3}{2}\quad \pm\frac{3}{4}\quad \pm6$$

Es fácil ver con la regla de Ruffini que ni 1, ni-1 son raíces de P.

Veamos por la Regla de Ruffini si 1/2 es raíz de P

	12	4	-17	6
1/2)		6	5	-6
	12	10	-12	**0**

1/2 es raíz de P.

Al resolver la ecuación $12x^2+10x-12=0$, se obtiene que -3/2 y 2/3 son raíces de P.

$$\boxed{\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}=12\cdot(x-1/2)\cdot(x+3/2)\cdot(x-2/3)}$$

26. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^4-4}$

Busquemos las raíces racionales de $\mathbf{x^4-4}$. Las posibles raíces en Q son los cocientes de los divisores de -4 (coeficiente de menor grado) entre los divisores de 1 (coeficiente de mayor grado),

$$\frac{\text{divisores de } -4}{\text{divisores de } 1};\quad \frac{\pm1\quad \pm2\quad \pm4}{\pm1}$$

$$\pm1\quad \pm2\quad \pm4$$

Es fácil ver con la regla de Ruffini que ninguno de los posibles valores son raíces de x^4-4. El polinomio no tiene raíces racionales.

Si se reconoce x^4-4 como una diferencia de cuadrados, $(\mathbf{x^2})^2-\mathbf{2}^2$ resultará fácil la descomposición factorial:
$x^4-4=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$
El primer factor es primo, pero el segundo vuelve a ser una diferencia de cuadrados $x^2-2=(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$

$$\boxed{\mathbf{x^4-4}=(x^2+2)\cdot\ (x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})}$$

EJERCICIOS resueltos

27. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}$

Las posibles raíces racionales de este polinomio son los divisores de 12

$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 4 \quad \pm 6 \quad \pm 12$

Con la regla de Ruffini miramos que divisores son raíces del polinomio

	1	-7	4	12
-1)		-1	8	-12
	1	**-8**	**12**	**0**
2)		2	-12	
	1	-6	**0**	

$$\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)$$

28. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2}$

Se aplican las **identidades notables**:

diferencia de cuadrados=suma por diferencia

$$(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2=(3x^3+6x)\cdot(x^3-4x+3)$$

El primer factor $(3x^3+6x)$ descompone sacando **factor común** $3x$, $(3x^3+6x)=3x\cdot(x^2+2)$; x^2+2 es primo pues la ecuación de segundo grado $x^2+2=0$ no tiene raíces reales.

Para (x^3-4x+3) **se buscan sus raíces racionales**

$1 \quad -1 \quad 3 \quad -3$

Vemos que 1 es raíz

	1	0	-4	3
1)		1	1	-3
	1	1	-3	**0**

$(x^3-4x+3)=(x-1)\cdot(x^2+x-3)$

Para descomponer x^2+x-3 se resuelve la **ecuación de segundo grado** $x^2+x-3=0$ que tiene por soluciones

$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$$\mathbf{(2x^3+x+\frac{3}{2})^2-(x^3+5x-\frac{3}{2})^2}=3x\cdot(x^2+2)\cdot(x-1)\cdot(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2})\cdot(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2})$$